યુનિટ - 1 સંકલન

- સંકલનની વ્યાખ્યા –

જો g(x) x નું એક વિકલનીય વિધેય હોય અને જો $\frac{d}{dx}$ [g(x)] = f(x) તો g(x) ને f(x)નું, x ને સાપેક્ષ સંકલન કહેવામાં આવે છે અને તેને $\int f(x)dx = g(x)$પ્રમાણે રજૂ કરાય છે.

: $\int f(x)dx = g(x)$

કોઈપણ વિધેયનું સંકલનફળ મેળવવાની પ્રક્રિયાને સંકલન કહેવામાં આવે છે $f(x)$ ને સંકલન કરવા માટેનું વિધેય (integrand) અને $g(x)$ ને તેનું સંકલન કહેવામાં આવે છે. સંકલન દર્શાવવા માટેનું પ્રતિક S એ Summation શબ્દનો પહેલો અક્ષર S જેવું છે અને dx એ x ને સાપેક્ષ સંકલન છે એમ દર્શાવે છે.

- સંકલનનાં કેટલાંક પ્રમાણિત રૂપો.

(1) $\int x^{n}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\int x^{3}\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^{4}}{4} + c$

$\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c, = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c, = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + c$

(2) $\int 1.\,dx = x + c$ $\int 5.\,dx = 5x + c$, $\int 68\,dx = 68x + c$

(3) $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$ $\int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$, $\int e^{-4x}\,dx = \frac{e^{-4x}}{-4} + c$

(4) $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$ $\int e^{3x+5}\,dx = \frac{e^{3x+5}}{3} + c$

(5) $\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\log a} + c$ $\int 5^{x}\,dx = \frac{5^{x}}{\log 5} + c$,

$\int 7^{2x}\,dx = \frac{7^{2x}}{2(\log 7)} + c$

(6) $\int a^{\mathrm{mx+n}}\,\mathrm{dx} = \frac{a^{mx+n}}{m.loga}$ +c $\int 3^{7\mathrm{x}+2}\,\mathrm{dx} = \frac{3^{7x+2}}{7.log3}$ +c

(7) $\int \frac{1}{x}$ dx = log x +c $\int \frac{1}{x+5}$ dx = log (x+5)+c ,

(8) $\int \frac{1}{ax+b}$dx = $\frac{\log(ax+b)}{a}$ +c $\int \frac{1}{2x+3}$ dx = $\frac{\log(2x+3)}{2}$ +c,

$\int \frac{1}{7-3x}$ dx = $\frac{\log(7-3x)}{-3}$ +c , $\int \frac{1}{x+10}$ dx =log x+10

(9) $\int (ax+b)^n$dx = $\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1).a}$ +c

$\int (5x+8)^{10}$dx = $\frac{(5x+8)^{10+1}}{(10+1).5}$ +c = $\frac{(5x+8)^{11}}{(11).5}$ +c

$\int (x+9)^4$dx = $\frac{(x+9)^{4+1}}{(4+1).1}$ +c = $\frac{(x+9)^5}{(5).1}$ +c

EX: 1 $\int (3x^4+4x^3-5x^2+3x)dx$

$= \frac{3x^{4+1}}{4+1} + \frac{4x^{3+1}}{3+1} - \frac{5x^{2+1}}{2+1} + \frac{3x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{3x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$

EX : 2 $\int (3-2x-x^4)dx$

$= 3\,x - \frac{2x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{4+1}}{4+1} + C \qquad = 3\,x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + C$

EX : 3 $\int (x^2-1)^2$dx

$= \int ((x^2)^2 - 2x^2 + 1)dx$

$= \int (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx \qquad = \frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{2x^{2+1}}{2+1} + x$ +C

$= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$ +C

EX :4 $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}})dx \qquad = \int (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}})dx$

$= \int (x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x + 2x^{\frac{-1}{2}})\, dx \qquad = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{2}.\frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{2x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}$ +C

$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ +C $\qquad = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{4}.x^2 + 4x^{\frac{1}{2}}$ +C

EX : 5 $\int (1 - 3x)(1 + x)dx$

EX : 6 $\int (2.\sqrt[3]{x} - 5x^{3.4} + 2.x^{-0.3} + x^7 + 3)dx$

$= \int (2.x^{\frac{1}{3}} - 5x^{3.4} + 2.x^{-0.3} + x^7 + 3)dx$

$= \frac{2x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{5x^{3.4+1}}{3.4+1} + \frac{2x^{-0.3+1}}{-0.3+1} + \frac{x^{7+1}}{7+1} + 3$ +C

$= \frac{2x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{5x^{4.4}}{4.4} + \frac{2x^{0.7}}{0.7} + \frac{x^8}{8} + 3x$ +C

$= \frac{6x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{5x^{4.4}}{4.4} - + \frac{2x^{0.7}}{0.7} + \frac{x^8}{8} + 3x$ +C

EX : 7 $\int(2^x + \frac{4}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx = \int(2^x + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}})dx$

$$= \int(2^x + \frac{4}{x} - 1.x^{\frac{-1}{3}})dx$$

$$= \frac{2^x}{log2} + 4.logx - \frac{1x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{2^x}{log2} + 4.logx - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$

$$= \frac{2^x}{log2} + 4.logx - \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C$$

EX : 8 $\int(3.\sqrt{x}+5+\frac{2}{x})dx$

$= \int(3.x^{\frac{1}{2}}+5+\frac{2}{x})dx \quad = \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5x + 2.\log x + C$

$$= \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 5x + 2.logx + C$$

$= \frac{6x^{\frac{3}{2}}}{3} + 5x + 2.logx + C \quad = 2x^{\frac{3}{2}} + 5x + 2.logx + C$

EX : 9 $\int(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

$= \int(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}})dx \quad = \int(x^{\frac{1}{2}} - 1x^{\frac{-1}{2}})dx$

$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C, \quad = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C, \quad = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$

EX : 10 $\int \frac{(1-x)^3}{x}$ dx

$(1-x)^3$ =
${}^3C_0(1)^3.(-x)^0$+${}^3C_1(1)^2.(-x)^1$+${}^3C_2(1)^1.(-x)^2$+${}^3C_3(1)^0.(-x)^3$

= (1).(1).(1) +(3).(1).($-x$)+(3).(1) (x^2) + (1).(1) (-x^3)

= 1 -3 x+ 3x^2 -x^3

= $\int (\frac{1-3x+3x^2-x^3}{x})$ dx = $\int (\frac{1}{x}-\frac{3x}{x}+\frac{3x^2}{x}-\frac{x^3}{x})$ dx

=$\int (\frac{1}{x}-3+3x-x^2)$ dx

EX : 11 $\int \frac{x^2-3x+\sqrt[3]{x}+7}{\sqrt{x}}$ dx $=\int \frac{x^2-3x+x^{\frac{1}{3}}+7}{x^{\frac{1}{2}}}$ dx

$= \int x^{2-\frac{1}{2}}-3x^{1-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}+7\,x^{-\frac{1}{2}}$ dx

= $\int x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{6}}+7\,x^{-\frac{1}{2}}$ dx

= $\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}$ - $\frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$ + $\frac{x^{\frac{-1}{6}+1}}{\frac{-1}{6}+1}$ + $\frac{7x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}$ +C

= $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$ - $\frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ + $\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}$ $+\frac{7x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ + C , = $\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}-2.\,x^{\frac{3}{2}}+\frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5}+14.\,x^{\frac{1}{2}}$ + C

EX : 12 $\int(\sqrt[3]{x}+e^{2x})dx$ =$\int(x^{\frac{1}{3}}+e^{2x})dx$, = $\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}$ +$\frac{e^{2x}}{2}$ + C,

$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{e^{2x}}{2} + C, \qquad = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{e^{2x}}{2} + C$

EX : 13 $\int (2^x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{4}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}})dx \qquad = \int (2^x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}})dx$

$= \int (2^x + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{4}{x} - x^{\frac{-1}{3}})dx$

$= \frac{2^x}{log2} + \frac{1}{2}.\frac{e^{-x}}{-1} + 4.logx - \frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} + C$

$= \frac{2^x}{log2} - \frac{1}{2}e^{-x} + 4.logx - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C, \qquad = \frac{2^x}{log2} - \frac{1}{2}e^{-x} + 4.logx - \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C$

EX : 14 $\int 4e^{2x+5}\, dx \qquad = \frac{4e^{2x+5}}{2} + C \qquad = 2e^{2x+5} + C$

EX : 15 $\int \frac{2^x.e^x + e^{2x}}{e^x}\, dx \qquad = \int \frac{2^x.e^x}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x}\, dx \qquad = \int 2^x + e^x\, dx$

EX : 16 $\int (7^x + e^{2x} + x^e)dx \qquad \frac{7^x}{log7} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

Ex : 17 $\int (2x+8)^3 dx \qquad = \frac{(2x+8)^{3+1}}{2.(3+1)} + C \qquad = \frac{(2x+8)^4}{8} + C$

EX : 19 $\int \frac{x-2}{x+2}\, dx$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline X+2 & X - 2 \\ & X + 2 \\ & - \quad - \\ \hline & \quad -4 \end{array}$$

$\int (\frac{x-2}{x+2} - \frac{4}{x+2})\, dx$

$\int (1-\frac{4}{x+2})$ dx = x – 4.log (x+2)+ C

EX : 21 $\int \frac{x^2}{x+2}$ dx

X -2

X+2) x^2

x^2+2x

\- -

-2x

-2x -4

\+ +

+4

= $\int (X-2+\frac{4}{x+2})$dx

= $\frac{x^2}{2}-2x+4.\log(x+2)$

EX : 22 $\int \frac{x^3}{x-1}$dx $\int (x^2+x+1+\frac{1}{x-1})dx$

નિયત સંકલન - જો વિધેય f(x) એક સંવૃત્ત ગાળા [a,b] માં સતત હોય તો વિધેય f(x) ના a અને b કિંમત વચ્ચેના સંકલનને નિયત સંકલન કહેવમાં આવે છે અને તેને $\int_a^b f(x)dx$ રીતે દર્શાવાય છે.

જો $\int f(x)dx = g(x)$ હોય તો $\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b$

= g(b) – g(a)

અહીં b ને સંકલનની ઉપલી સીમા અને a ને સંકલનની નીચલી સીમા કહેવામાં આવે છે. $\int_a^b f(x)dx$ ને a થી b વચ્ચેનું સંકલન એવું સમજવામાં આવે છે

EX : 23 $\int_2^4 (x^2+x-1)$ dx

$\int_2^4 [x^2+x-1]$ = $[x^2+x-1\ ]^4{}_2$ = $[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\ ]^4{}_2$

$= [\frac{(4)^3}{3} + \frac{(4)^2}{2} - (4)]$ $-[\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} - (2)]$

$= [\frac{64}{3} + \frac{16}{2} - (4)]$ $-[\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - (2)]$ $= \left[\frac{128+48-24}{6}\right] - \left[\frac{16+12-12}{6}\right]$

$=\left[\frac{152-16}{6}\right]$ $= \frac{136}{6}$ $= \frac{68}{3}$

Ex : 24 $\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)$ dx $= [2x^2 - x^3]_{-1}^{1}$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$ $= \left[\frac{2(1)^3}{3} - \frac{(1)^4}{4}\right] - \left[\frac{2(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4}\right]$

$= \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right] - \left[\frac{-2}{3} - \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{8-3}{12}\right] - \left[\frac{-8-3}{12}\right] = \left[\frac{5}{12}\right] - \left[\frac{-11}{12}\right] = \left[\frac{5+11}{12}\right] = \left[\frac{16}{12}\right]$

EX : 25 $\int_{-3}^{3}(11 + 2x^2 + x^4)$ dx

$= \left[11x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{3}$ $= \left[11(3) + \frac{2(3)^3}{3} + \frac{(3)^5}{5}\right] - \left[11(-3) + \frac{2(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^5}{5}\right]$

$$= \left[(33) + \frac{54}{3} + \frac{243}{5}\right] - \left[-33 + \frac{-54}{3} + \frac{-243}{5}\right]$$

$= \left[\frac{495+270+729}{15}\right] - \left[\frac{-495-270-729}{15}\right] = \left[\frac{1494}{15}\right] - \left[\frac{-1494}{15}\right] = \left[\frac{1494+1494}{15}\right] = \frac{1494+1494}{15}$

$= \frac{2988}{15}$ $= \frac{996}{15}$

Ex : 27 $\int_1^2 \left(\frac{x^2+2x+5}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(x + 2 + \frac{5}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + 5.\log x\right]_1^2$

$=\left[\frac{(2)^2}{2} + 2(2) + 5.\log(2)\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} + 2(1) + 5.\log(1)\right]$

$= \left[\frac{4}{2} + 4 + 5.\log(2)\right] - \left[\frac{1}{2} + 2 + 5.\log(1)\right]$ $= [2 + 4 + 5.\log 2] - \left[\frac{1+4}{2}\right]$

= $[6 + 5.\log(2)] - \left[\frac{5}{2}\right]$ = 6 +5.log (2)- $\frac{5}{2}$

= 6- $\frac{5}{2}$ + 5.log (2) = $\frac{7}{2}$ +5.log (2)

EX : 28 $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$ = $\int_{-3}^{-1}(x^{-2} - x^{-3})dx$

= $\left[\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2}\right]_{-3}^{-1}$ = $\left[\frac{1}{-x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1}$

= $\left[\frac{1}{-(-1)} + \frac{1}{2(-1)^2}\right] - \left[\frac{1}{-(-3)} + \frac{1}{2(-3)^2}\right]$

= $\left[1 + \frac{1}{2}\right]$ - $\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right]$ = $\left[\frac{2+1}{2}\right]$ - $\left[\frac{6+1}{18}\right]$ = $\left[\frac{3}{2}\right]$ - $\left[\frac{7}{18}\right]$

= $\left[\frac{27-7}{18}\right]$ = $\left[\frac{20}{18}\right]$ = $\left[\frac{10}{9}\right]$

EX : 29 $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ = $\int_1^4 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ dx$ = $\int_1^4 x^{\frac{-1}{2}}\ dx$

= $\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4$ = $\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$ =$\left[2\sqrt{x}\right]_1^4$

= $[2\sqrt{4}] - [2\sqrt{1}]$ = [2.(2)] - [2.(1)] = 4 – 2 = 2

EX : 30 $\int_6^{10} \frac{dx}{x+2}$ = $\int_6^{10} \frac{1}{x+2}\ dx$ = $[1.\log(x+2)]_6^{10}$

= $[1.\log(10+2)] - [1.\log(6+2)]$ = log 12 – log 8

= $log\frac{12}{8}$ = $log\frac{3}{2}$

EX ; 31 $\int_1^2 (x+3)^3\,dx$ = $\left[\frac{(x+3)^4}{4}\right]_1^2$ = $\left[\frac{(2+3)^4}{4}\right] - \left[\frac{(1+3)^4}{4}\right]$

= $\left[\frac{(5)^4}{4}\right] - \left[\frac{(4)^4}{4}\right]$ = $\left[\frac{625-256}{4}\right]$ = $\left[\frac{369}{4}\right]$

EX : 32 $\int_2^3 e^{2x}dx$ $=\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]^3{}_2$ $= \left[\frac{e^{2(3)}}{2}\right] - \left[\frac{e^{2(2)}}{2}\right]$ $= \left[\frac{e^6}{2} - \frac{e^4}{2}\right]$

$= \left[\frac{e^4(e^2-1)}{2}\right]$

EX : 34 $\int_6^{10}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)dx$ $= \int_6^{10}\left(1-\frac{4}{x+2}\right)dx$ $[x-4.\log(x+2)]^{10}{}_6$

$= [10-4.\log(10+2)] - [6-4.\log(6+2)]$

$= 10 - 4.\log(12) - 6 + 4.\log(8)$

$= 4 - 4\log(12) + 4.\log(8)$

$= 4 - 4.[\log(12) - \log(8)]$

$= 4.(1 - \log\frac{12}{8})$

EX : 36 $\int_{10}^{15}(25-x)^3$ $= \int_{10}^{15}[25-(25-x)]^3$

$= \int_{10}^{15}[25-25+x]^3$ $= \int_{10}^{15}[x]^3$ $= \left[\frac{x^4}{4}\right]^{15}{}_{10}$

$= \left[\frac{(15)^4}{4}\right] - \left[\frac{(10)^4}{4}\right]$ $= \frac{50625-10000}{4}$ $= \frac{40625}{4}$

EX : 37 $I = \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}}\right)dx$ $I = \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{4-(4-x)}}\right)dx$

$= \int_0^4 \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x}}\, dx$

$I + I = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}} + \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x}}\right) dx$

2I $= \int_0^4 \left[\frac{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}}\right]$ dx

2I = $\int_0^4 [1]$ dx , 2I = $[1]^4{}_0$

2I = (4-0) , 2I = 4, I = 2

- કુલ ખર્ચનું વિધેય અને આમદાની વિધેય મેળવવા માટે સંકલનનો ઉપયોગ સીમાંત આમદાની , એ આમદાની વિધેયના વિકલન$\frac{dR}{dx}$ દ્વારા મેળવી શકાય છે. આથી સીમાંત આમદાનીનું સંકલન કરવાથી આમદાની વિધેય મળી શકે, તેવી જ રીતે સીમાંત ખર્ચ વિધેય $\frac{dC}{dx}$ ના સંકલન ઉપરથી કુલ ખર્ચનું વિધેય મેળવી શકાય છે.

$\int (MR)dx =$ કુલ આમદાની વિધેય

$\int (MC)dx =$ કુલ ખર્ચ વિધેય

EX :40 જો સીમાંત ખર્ચનું વિધેય MC = 100-10$x + \frac{x^2}{10}$ હોય અને સ્થિર ખર્ચ રૂ 500 હોય તો કુલ ખર્ચ અને સરેરાશ ખર્ચ મેળવો.

કુલ ખર્ચ વિધેય $=\int (MC)dx$

$= \int \left(100 - 10x + \frac{x^2}{10}\right) dx \quad = 100x - \frac{10x^2}{2} + \frac{x^3}{3(10)}$+C

અહીં સ્થિર ખર્ચ રૂ 500 છે., એટલે કે જ્યારે x = 0, ત્યારે કુલ ખર્ચ = 500

$= 100x - 5x^2 + \frac{x^3}{30}$ + C

500 $= 100(0) - 5(0)^2 + \frac{(0)^3}{30}$ + C , 500 = C

કુલ ખર્ચ વિધેય = $100x - 5x^2 + \frac{x^3}{30}$ + 500

સરેરાશ ખર્ચ = $\frac{\text{કુલ ખર્ચ}}{x}$, સરેરાશ ખર્ચ = $\frac{100x - 5x^2 + \frac{x^3}{30} + 500}{x}$

$= 100 - 5x + \frac{x^2}{30} + \frac{500}{x}$

Ex : 41 પેન બનાવતી એક કંપની માટે સીમાંત ખર્ચ વિધેય

$MC = \frac{x}{300} + 2.5$ હોય તો 500 પેન બનાવવાનો ખર્ચ શોધો.

કુલ ખર્ચ વિધેય $= \int (MC)dx \quad = \int \left(\frac{x}{3000} + 2.5\right) dx$

$= \frac{x^2}{2(3000)} + 2.5x + C$, $\quad = \frac{x^2}{6000} + 2.5x + C$

અહીં સ્થિર ખર્ચ આપેલ નથી ત્યારે x = 0, અને કુલ ખર્ચ = 0 લેતાં

$0 = \frac{x^2}{6000} + 2.5x + C$, $\quad 0 = \frac{(0)^2}{6000} + 2.5(0) + C$, $\quad 0 = C$

કુલ ખર્ચ વિધેય $= \frac{x^2}{6000} + 2.5x$ માં x = 500 મૂકતાં

$= \frac{(500)^2}{6000} + 2.5(500) \quad = \frac{250000}{6000} + 1250$

= 41.67 +1250 = 1291.67

EX : 43 સીમાંત ખર્ચ વિધેય MC = $3000.e^{0.3x} + 50$ છે. જ્યાં x ઉત્પાદિત એકમો દર્શાવે છે. જો સ્થિર રૂ 80,000 હોય તો કુલ ખર્ચ વિધેય મેળવો.

કુલ ખર્ચ વિધેય $= \int (MC)dx$

$= \int (3000.e^{0.3x} + 50)dx$

$= \frac{3000.e^{0.3x}}{0.3} + 50x + c \quad =$ 10,000. $e^{0.3x} + 50x + C$

અહીં સ્થિર ખર્ચ રૂ 80,000 છે., એટલે કે જ્યારે x = 0, ત્યારે કુલ ખર્ચ = 80,000

80,000 = 10,000. $e^{0.3x} + 50x + c$

80,000 = 10,000. $e^{0.3(0)}$+50(0) + C

80,000 = 10,000. $e^{(0)}$ + C $\quad$ 80,000 = 10,000. $(1)+C$

80,000 = 10,000 +C , $\quad$ 80,000 - 10,000 = C

70,000 = C માટે કુલ ખર્ચ વિધેય = 10,000. $e^{0.3x}+50x+70,000$

EX : 44 એક વસ્તુનું સીમાંત ખર્ચ વિધેય 3+ $\frac{x}{3000}$ + $e^{-0.03x}$ મળે છે, જ્યાં x એ એકમોની સંખ્યા દર્શાવે છે, તો 100 એકમોનું ઉત્પાદન કરવાનું કુલ ખર્ચ શોધો.

કુલ ખર્ચ વિધેય = $\int(MC)dx$

$$= \int_0^{100}\left(3+\frac{x}{3000}+e^{-0.03x}\right)dx$$

$$= \left[3x+\frac{x^2}{2(3000)}+\frac{e^{-0.03x}}{-0.03}\right]_0^{100}$$

$$= \left[3(100)+\frac{(100)^2}{6000}-\frac{e^{-0.03(100)}}{0.03}\right]-\left[3(0)+\frac{(0)^2}{6000}-\frac{e^{-0.03(0)}}{0.03}\right]$$

$$= \left[3(100)+\frac{(100)^2}{6000}-\frac{e^{-3}}{0.03}\right]-\left[3(0)+\frac{(0)^2}{6000}-\frac{e^{0}}{0.03}\right]$$

$$= \left[300+1.67-\frac{0.05}{0.03}\right]-\left[0+0-\frac{1}{0.03}\right]$$

= $[300+1.67-1.67]-[0+0-33.33]$ = $300+33.33$ = 333.33₹

EX : 46 જોડા બનાવતી એક કંપની માટે સીમાંત ખર્ચ $6+10x+6x^2$ છે. અને એક જોડ જોડાં બનાવવાનો ખર્ચ રૂ. 129 હોય તો કુલ ખર્ચ અને સરેરાશ ખર્ચ શોધો.

કુલ ખર્ચ વિધેય = $\int(MC)dx$

$$=\int(6+10x+6x^2)dx$$

$$= 6x+\frac{10x^2}{2}+\frac{6x^3}{3}+C = 6x+5x^2+2x^3+C$$

અહીં એક જોડ જોડાં બનાવવાનો ખર્ચ રૂ. 129 છે માટે X = 1 અને કુલ ખર્ચ રૂ. 129 થાય.

129 = $6(1) + 5(1)^2 - 2(1)^3 + C$

129 = 6 + 5 - 2 + C , 129 = 9 + C , 120 = C

કુલ ખર્ચ વિધેય= $6x + 5x^2 + 2x^3 + 120$

સરેરાશ ખર્ચ વિધેય = $\frac{6x+5x^2+2x^3+120}{x} = 6 + 5x + 2x^2 + \frac{120}{x}$

EX : 48 અમુક ચોક્કસ વસ્તુ માટે સીમાંત આમદાની વિધેય $4 + e^{-0.03x}$છે. જ્યાં x વેચાયેલા એકમોની સંખ્યા દર્શાવે છે, તો 100 એકમોના વેચાણ માટે કુલ આમદાની શોધો.

કુલ આમદની વિધેય $= \int (MR)dx$

$= \int_0^{100} (4 + e^{-0.03x})dx$

$= \left[4x + \frac{e^{-0.03x}}{-0.03}\right]_0^{100} \quad = \left[4x - \frac{e^{-0.03x}}{0.03}\right]_0^{100}$

$= \left[4(100) - \frac{e^{-0.03(100)}}{0.03}\right] - \left[4(0) - \frac{e^{-0.03(0)}}{0.03}\right]$

$= \left[400 - \frac{e^{-3}}{0.03}\right] - \left[0 - \frac{e^{0}}{0.03}\right] \quad = \left[400 - \frac{0.05}{0.03}\right] - \left[0 - \frac{1}{0.03}\right]$

$= \quad [400 - 1.67\,] - [0 - 33.33]$

= 398.33 +33.33 = 431.66

EX : 49 એક વસ્તુનું સીમાંત આમદાની અને સીમાંત ખર્ચના વિધેયો MR = 5-$4x + 3x^2$ અને MC = 3+2x હોય અને જો સ્થિર ખર્ચ શૂન્ય હોય, તો નફાનું વિધેય અને જ્યારે x = 4 હોય ત્યારે નફો શોધો.

કુલ આમદની વિધેય $= \int (MR)dx$

કુલ આમદની વિધેય = $\int (5 - 4x + 3x^2)dx$

$= 5x - \frac{4x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}$ કુલ આમદની વિધેય = $5x - 2x^2 + x^3$

કુલ ખર્ચ વિધેય = $\int(MC)dx$

= $\int(3+2x)dx$ = $3x + \frac{2x^2}{2}$ +C

= $3x + x^2$ +C

અહીં સ્થિર ખર્ચ શૂન્ય છે ત્યારે X= 0 અને કુલ ખર્ચ = 0 થાય

0 = $3(0) + (0)^2$+C કુલ ખર્ચ વિધેય = $3x + x^2$

નફાનું વિધેય = કુલ આમદની – કુલ ખર્ચ

= $5x - 2x^2 + x^3 - (3x + x^2)$

= $5x - 2x^2 + x^3 - 3x - x^2$

= $2x - 3x^2 + x^3$ આ વિધેયમાં X = 4 મૂકતાં

નફાનું વિધેય = $2(4) - 3(4)^2 + (4)^3$

= 8 – 48 +64 = 24 ₹

EX : 51 એક દિવસ દરમિયાન એક વસ્તુના x એકમો ઉત્પાદિત કરવાનો સીમાંત ખર્ચ MC = 16x -1591 છે.એકમદીઠ વેચાણ કિંમત ₹ 9 અચળ રાખી છે અને દરરોજ નો 1,800 ₹ નો સ્થિર ખર્ચ થાય છે. આ ઉપરથી (1) ખર્ચ વિધેય (2) નફાનું વિધેય (3) જ્યારે 100 એકમોનું ઉત્પાદન કરવમાં આવે ત્યારે કેટલો નફો થશે તે શોધો.

કુલ ખર્ચ વિધેય = $\int(16x - 1591)dx$ = $\frac{16x^2}{2} - 1591x + C$

= $8x^2 - 1591x$+C

1800 = $8(0)^2 - 1591(0) + C$

1800 = C

કુલ ખર્ચ વિધેય =$8x^2 - 1591x$+1800

કુલ આમદાની વિધેય = $9x$

નફાનું વિધેય = $9x - (8x^2 - 1591x - 1800)$

= $9x - 8x^2 + 1591x - 1800$

= $1600\,x - 8x^2 - 1800$ આ વિધેયમાં $x = 100$ મૂકતાં

કુલ નફો = $1600\,(100) - 8(100)^2 - 1800$

= 160000 – 80,000 – 1800

$= 78{,}200$