યુનિટ નં -2 પોયસન વિતરણ અને અતિ ગુણોત્તર વિતરણ

- પોયસન વિતરણ – પોયસન વિતરણ એ અસતત ચલનું સંભાવના વિતરણ છે. ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી સાયમન ડી પોયસને ઈ.સ. 1837માં આ વિતરણ શોધેલું. દ્વિપદી વિતરણમાં જ્યારે n ની કિંમત ખૂબ મોટી હોય અને p ની કિંમત ખૂબ નાની હોય. ઉપરાંત np ની કિંમત અચળ સંખ્યા હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણનું લક્ષ પોયસન વિતરણ બને છે, જેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે મુજબ છે.

$P(x) = \frac{e^{-m}.m^x}{x!}$ જ્યાં e = અચળાંક 2.7183

m = મધ્યક np

x = સફળતાની સંખ્યા

આ સંભાવના વિધેય પોયસન વિતરણ તરીકે ઓળખાય છે. અસતત યદચ્છ ચલની કિંમતો x = 0,1,2.... વગેરે મૂકવાથી સફળતાની જુદી જુદી સંખ્યા માટે જુદી જુદી સંભાવના મેળવી શકાય. X ની તમામ કિંમતો 0,1,2,3.....∞માટે સંભાવનાનો કુલ સરવાળો 1 થાય છે. એટલે કે $\sum \frac{e^{-\mathrm{m}}\mathrm{m}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}!} = 1$ થાય.

- પોયસન વિતરણના ગુણધર્મો

(1) પોયસન વિતરણ અસતત ચલનું વિતરણ છે.

(2) m એ પોયસન વિતરણનો પ્રાચલ છે.

(3) આ વિતરણનો મધ્યક = m

(4) આ વિતરણનું વિચરણ = m પોયસન વિતરણમાં મધ્યક = વિચરણ પ્રમાણિત વિચલન = $\sqrt{m}$

(5) બે નિરપેક્ષ પોયસન ચલોના સરવાળાનું વિતરણ પોયસન વિતરણ હોય છે.

(6) આ વિતરણ ધન વિષમતાવાળું વિતરણ છે.

(7) જેમ m ની કિંમત વધુ તેમ વિષમતા ઓછી હોય છે.

(8) ભાગ્યે જ બનતા બનાવો માટે આ વિતરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

- પોયસન વિતરણની ઉપયોગિતા

(1) રસ્તા ઉપર બનતા અકસ્માતની સંખ્યા

(2) પુસ્તકમાં પાનાદીઠ છાપભૂલની સંખ્યા.

(3) સમાજમાં બનતા આપઘાતના બનાવોની સંખ્યા.

(4) ફૂટબોલ કે હોકીની મેચમાં નોંધાયેલા ગોલની સંખ્યા

(5) ગુણવત્તા નિયંત્રણના C આલેખમાં પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ થાય છે.

(6) સ્વીકૃતિ નિદર્શમાં આ વિતરણ ઉપયોગી બને છે.

આમ રોજબરોજના વ્યવહારમાં જે બનાવો ભાગ્યે જ બનતા હોય છે તે મોટે ભાગે પોયસન વિતરણને અનુસરતા હોય છે.

વધુમાં વધુ 2 (બે કે બેથી ઓછા) $x \leq 2$, = P(0) +P(1) +P(2)

બે થી ઓછા (બે કરતાં ઓછા), $x < 2$ = P(0) + P(1)

ઓછામાં ઓછા 2 (બે કે બેથી વધુ) $x \geq 2$, = P(2) +P(3) +P(4)+……….

= 1- P(0) +P(1)

બે થી વધુ (બે કરતાં વધુ) $x > 2$, = P(3) +P(4)+……….

= 1- P(0) + P(1) + P(2)

Ex : 5 દીવાસળી માથા વિનાની હોવાની સંભાવના $\frac{1}{100}$ છે. દીવાસળી ની દરેક પેટીમાં 50 દીવાસળીઓ છે. પોયસન વિતરણનો ઉપયોગ કરીને માથા વિનાની (1) શૂન્ય (2) 1 દીવાસળી (3) 2 દીવાસળી હોય તેવી પેટીઓની ટકાવારી શોધો. $(e^{-0.5} = 0.61)$

અહી n = 50 અને $P = \frac{1}{100}$ છે.

મધ્યક $m = n \times P = 50 \times \frac{1}{100}$

m = 0.5

(1) માથા વિનાની શૂન્ય દીવાસળી હોય તેવી પેટીની ટકાવારી

એટલે કે $x = 0$ ની સંભાવના

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 0$, m = 0.5 મૂકતા

$= \frac{e^{-0.5}.\ (0.5)^0}{0!} = \frac{0.61\ \times 1}{1}$ = 0.61 (0! = 1)

પેટીઓની ટકાવારી **0.61 × 100 = 61**

(2) 1 દીવાસળી માથા વિનાની હોવાની સંભાવના

એટલે કે $x = 1$ ની સંભાવના

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 1$, m = 0.5 મૂકતા

$= \frac{e^{-0.5}.\ (0.5)^1}{1!} = \frac{0.61\ \times 0.5}{1} = \frac{0.305}{1}$ = 0.305 (1! = 1)

પેટીઓની ટકાવારી **0.305 × 100 = 30.5**

(3) 2 દીવાસળી માથા વિનાની હોવાની સંભાવના એટલે કે $x = 2$ ની સંભાવના $P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 2$, m = 0.5 મૂકતા

$= \frac{e^{-0.5}.\ (0.5)^2}{2!}$, $= \frac{0.61\ \times 0.25}{2\times 1}$, $= \frac{0.1525}{2}$, = 0.07625 , (2! = 2×1)

પેટીઓની ટકાવારી $0.07625 \times 100 = 7.625$

Ex- 6 ઈલેક્ટ્રીક ફ્યૂઝના એક ઉત્પાદનમાં 2 ટકા ફ્યૂઝ નુકસાનીવાળા હોય તો 200 ફ્યૂઝની એક પેટીમાં (1) બધા જ ફ્યૂઝ સારા હોવાની (2) વધુમા વધુ 2 ફ્યૂઝ નુકસાનીવાળા હોવાની (3) 3 ફ્યૂઝ નુકસાનીવાળા હોવાની સંભાવના શોધો. $(e^{-4} = 0.0183)$

અહી n = 200 અને P = 2% એટલે $P = \frac{2}{100}$ છે.

મધ્યક $m = n \times P = 200 \times \frac{2}{100}$

$m = 4$

(1) બધા જ ફ્યૂઝ સારા હોવાની સંભાવના એટલે કે નુકસાનીવાળા ફ્યૂઝની સંખ્યા શૂન્ય થાય ત્યારે $x = 0$ ની સંભાવના થાય

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 0$, m = 4 મૂકતા

$= \frac{e^{-4}.\ (4)^0}{0!} = \frac{0.0183 \times 1}{1} = 0.0183$ $(0! = 1)$

(2) વધુમાં વધુ 2 ફ્યૂઝ નુકસાનીવાળા હોવાની સંભાવના

એટલે કે $x \leq 2$ થાય X = 0,1,2 જેની સંભાવના = P(0) + P(1) + P(2)

$x = 0 = 0.0183$

$x = 1$ ની સંભાવના

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 1$, m = 4 મૂકતા

$= \frac{e^{-4}.\ (4)^1}{1!} = \frac{0.0183 \times 4}{1} = 0.0732$ $(1! = 1)$

$x = 2$ ની સંભાવના

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 2$, m = 4 મૂકતા

$= \frac{e^{-4}.\ (4)^2}{2!} \quad = \frac{0.0183\ \times 16}{2}$ = 0.1464 (2! = 2×1)

વધુમાં વધુ 2 ફ્યૂઝ નુકસાનીવાળા હોવાની સંભાવના

= P(0) + P(1) + P(2)

= 0.0183+0.0732+0.1464

= 0.2379

(3) 3 ફ્યૂઝ નુકસાનીવાળા હોવાની સંભાવના, $x = 3$ ની સંભાવના થાય

P$(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $\quad x = 3$, m = 4 મૂકતા

$= \frac{e^{-4}.\ (4)^3}{3!} \quad = \frac{0.0183\ \times 64}{6}$ = 0.1952 (3! = 3×2×1)

Ex -7 ટાંકણીઓનો એક ઉત્પાદક તેના ઉત્પાદન 5 ટકા ટાંકણીઓ ખામીયુક્ત છે એમ જાણે છે.દરેક બોક્સમાં તે 100 ટાંકણીઓ મૂકે છે અને ખાતરી આપે છે કે કોઈ પણ બોક્સમાં 4 કરતાં વધારે ટાંકણીઓ ખામીવાળી હશે નહીં તો કોઈ પણ એક બોક્સ માટે તેણે આપેલી ખાતરી સાચી હોય તેની સંભાવના શોધો. **(e^{-5}= 0.0067)**

Ex – 8 ઈલેક્ટ્રીક બલ્બના એક ઉત્પાદનમાંથી 3 ટકા બલ્બ નુકસાનીવાળા છે, તો 100 બલ્બના એક પેકેટમાં 5 બલ્બ નુકસાનીવાળા હોવાની સંભાવના શોધો. $(e^{-3} = 0.0498)$

Ex – 4 એક વ્યક્તિ પાસે કેટલીક ટેક્સીઓ છે. તેને પાછલા અનુભવ પરથી એવું જણાયું કે રોજની સરેરાશ 3 ટેકસીઓની માંગ છે, તો કોઈ પણ એક દિવસે 2 થી વધુ ટેક્સીઓ ઉપયોગમાં ન લેવાતી હોય તેની સંભાવના શોધો. $(e^{-3} = 0.0498)$

અહીં m = 3 આપેલું છે.

વધુમાં વધુ 2 ટેક્સીઓની સંભાવના   એટલે કે

$x \leq 2$ થાય   X = 0,1,2   જેની સંભાવના = P(0) + P(1) + P(2)

અહીં m = 3 આપેલું છે.

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^{x}}{x!}$ $x = 0$, m = 3   મૂકતા

$= \frac{e^{-3}.\ (3)^{0}}{0!} = \frac{0.0498\ \times 1}{1}$ = 0.0498 $(0! = 1)$

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^{x}}{x!}$ $x = 1$, m = 3   મૂકતા

$= \frac{e^{-3}.\ (3)^{1}}{1!} = \frac{0.0498\ \times 3}{1}$ = 0.1494 $(1! = 1)$

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^{x}}{x!}$ $x = 2$, m = 3   મૂકતા

$= \frac{e^{-3}.\ (3)^{2}}{2!} = \frac{0.0498\ \times 9}{2}$ = 0.2241 $(2! = 1)$

= P(0) + P(1) + P(2)
= 0.0498 + 0.1494 + 0.2241
= 0.4233

Ex : 9   એક હોસ્પિટલમાં દાખલ થતા દર્દીઓમાં સરેરાશ 3 ટકા દર્દીઓ સ્પેશ્યલ રૂમની માંગણી કરતા હોય છે. કોઈ એક દિવસે હોસ્પિટલમાં 50 દર્દીઓને દાખલ કરવામાં આવે અને તેદિવસે 3 સ્પેશ્યલ રૂમ ખાલી હોય તો (1) કોઈ પણ દર્દી સ્પેશ્યલ રૂમની માગણી કરશે નહિ.

(2) સ્પેશ્યલ રૂમની માગને પહોંચી શકાશે નહિ તેની સંભાવના શોધો.

$(e^{-1.5} = 0.2231)$

અહીં n = 50 અને 3 ટકા એટલે કે $P = \frac{3}{100}$ થાય

m = nP, $= 50 \times \frac{3}{100}$, m = 1.5 થાય

(1) કોઈ પણ દર્દી સ્પેશ્યલ રૂમની માગણી કરશે નહિ તેની સંભાવના

એટલે કે x = 0 થાય

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 0$, m = 1.5 મૂકતા

$P(0) = \frac{e^{-1.5}.\ (1.5)^0}{0!}$ $= \frac{0.2231 \times 1}{1}$ = 0.2231

(2) સ્પેશ્યલ રૂમની માગને પહોંચી શકાશે નહિ તેની સંભાવના એટલે કે સ્પેશ્યલ રૂમની માગ 3 કરતા વધુ હશે એટલે કે X ની કિંમત 3 કરતા વધુ થાય $x > 3$ = P(4) +P(5)+...... થાય

માટે = 1 – P(0)+ P(1) +P(2)+P(3) થાય

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 1$, m = 1.5 મૂકતા

$P(1) = \frac{e^{-1.5}.\ (1.5)^1}{1!} = \frac{0.2231 \times 1.5}{1}$ = 0.3347 $(1! = 1)$

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 2$, m = 1.5 મૂકતા

$P(2) = \frac{0.2231 \times 2.25}{2!}$ = 0.25098 $(2! = 2 \times 1)$

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 3$, m = 1.5 મૂકતા

P(3) $= \frac{e^{-1.5}.\ (1.5)^3}{3!} = \frac{0.2231 \times 3.375}{6}$ = 0.1255 $(3! = 3\times 2\times 1)$

= 1 – **P(0)+ P(1) +P(2)+P(3)**

= 1 – 0.2231+0.3347+0.25098+0.1255

= 1 – 0.9343

= 0.0657

વધુમા વધુ 2 આવું આપેલું હોય ત્યારે X ≤ **2** થાય ત્યારે **X = 0,1,2** ની સંભાવના શોધવાની આવે **= P(0)+P(1) +P(2)** થાય

2 થી ઓછા હોય ત્યારે X **< 2** થાય ત્યારે **X = 0,1** ની સંભાવના શોધવાની આવે **= P(0)+P(1)** થાય

ઓછામાં ઓછા 2 આવું આપેલું હોય ત્યારે X $\geq$ **2** થાય ત્યારે **X =** 2 અથવા 2થી વધુની સંભાવના શોધવાની આવે **= P(2)+P(3) +P(4) +.......**∞ થાય ત્યારે **=** 1- **P(0)+P(1)**

2 થી વધું તેવું આપેલું હોય ત્યારે **X > 2** થાય છ .ત્યારે સંભાવના X = 3,4,.... ∞ સુધી થાય ત્યારે **=** 1- **P(0)+P(1)+P(2)**

Ex : 11 એક ફેકટરીમાં 0.5 ટકા વસ્તુઓ ખામીવાળી માલૂમ પડે છે. જો 100 વસ્તુઓનો એક નિદર્શ લેવામાં આવે તો તેમાં 2 કે તેથી વધુ વસ્તુઓ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના શોધો. ($e^{0.5}$**= 0.6065)**

અહીં n =100 , P = **0.5%** = $\frac{0.5}{100}$

m = nP, = **100**× $\frac{0.5}{100}$, **m = 0.5**

2 કે તેથી વધુ વસ્તુઓ ખામીવાળી હોય તેની સંભાવના શોધો.

$x \geq 2$ એટલે કે **= P(2) + P(3) +........** થાય

માટે $= 1 - P(0) + P(1)$

$$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^{x}}{x!} \quad x = 0,\ m = 0.5 \text{ મૂકતા}$$

$$P(0) = \frac{e^{-0.5}.\ (0.5)^{0}}{0!} = \frac{0.6065 \times 1}{1} = 0.6065 \quad (0! = 1)$$

$$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^{x}}{x!} \quad x = 1,\ m = 0.5 \text{ મૂકતા}$$

$$P(1) = \frac{e^{-0.5}.\ (0.5)^{1}}{1!} = \frac{0.6065 \times 0.5}{1} = 0.3033 \quad (1! = 1)$$

$= 1 - P(0) + P(1)$
$= 1 - 0.6065 + 0.3033$
$= 1 - 0.9098$
$= 0.0902$

Ex: 12 જો યદચ્છ ચલ x પોયસન વિતરણને અનુસરે કે જેનો મધ્યક 2 હોય તો x ની કિંમત 1 અથવા તેથી વધુ થાય તે માટેની સંભાવના શોધો. $(e^{-2} = 0.1353)$

Ex : 13 પોયસન વિતરણનો મધ્યક = **0.81** છે, તો તેનું પ્રમાણિત વિચલન શોધો. આ વિતરણ માટે $x = 0$ અને $x = 2$ માટેની સંભાવના શોધો. $(e^{-0.81} = 0.449)$

Ex : 14 x એક એવો પોયસન ચલ છે કે જેમાં $P(x = 3) = P(x = 4)$ તો સાબિત કરો $P(x = 2) = 8e^{-4}$

$$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^{x}}{x!} \quad x = 3 \text{ મૂકતાં ,} \quad P(3) = \frac{e^{-m}.\ m^{3}}{3!} = \frac{e^{-m}.\ m^{3}}{6}$$

$$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^{x}}{x!} \quad x = 4 \text{ મૂકતાં,} \quad P(4) = \frac{e^{-m}.\ m^{4}}{4!} = \frac{e^{-m}.\ m^{4}}{24}$$

હવે, $P(x = 3) = P(x = 4)$

$\frac{e^{-m}.\ m^3}{6} = \frac{e^{-m}.\ m^4}{24}$

$\frac{24}{6} = \frac{e^{-m}.\ m^4}{e^{-m}.\ m^3}$

4 = m મધ્યક

P$(x = 2) = 8e^{-4}$ સાબિત કરવા માટે

P$(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ **માં જ્યાં** $x = 2$ **અને m = 4 મૂકતાં**

P(2) = $\frac{e^{-4}.(4)^2}{2!} = \frac{e^{-4}.\ 16}{2} = 8e^{-4}$ **સાબિત કરી શકાય**

Ex : 15 **P**$(x = 1) = P(x = 2)$ તો સાબિત કરો **P(x = 4) =** $\frac{2}{3}\ e^{-2}$

P$(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 1$ મૂકતાં, **P(1) =** $\frac{e^{-m}.\ m^1}{1!} = \frac{e^{-m}.\ m^1}{1}$

P$(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 2$ મૂકતાં, **P(2) =** $\frac{e^{-m}.\ m^2}{2!} = \frac{e^{-m}.\ m^2}{2}$

હવે, **P**$(x = 1) = P(x = 2)$

$\frac{e^{-m}.\ m^1}{1} = \frac{e^{-m}.\ m^2}{2}$

$\frac{2}{1} = \frac{e^{-m}.\ m^2}{e^{-m}.\ m^1}$

2 = m મધ્યક

$P(x = 4) = \frac{2}{3}\, e^{-2}$ સાબિત કરવા માટે

$P(x) = \frac{e^{-m}.\, m^x}{x!}$ માં જ્યાં $x = 4$ અને m = 2 મૂકતાં

$P(4) = \frac{e^{-2}.(2)^4}{4!} = \frac{e^{-2}.\, 16}{24} = \frac{2}{3}\, e^{-2}$ **સાબિત કરી શકાય**

Ex: 17 **એક યદચ્છ ચલ x** પોયસન વિતરણને અનુસરે છે અને $P(x = 1) = P(x = 2)$, તો $P(x = 0)$ મેળવો.

Ex : 27 (C) પોયસન ચલ x માટે $3.P(x = 2) = P(x = 4)$ હોય તો તેનો મધ્યક અને વિચરણ શોધો. વળી, $P(x \leq 2)$ મેળવો.

$(e^{-6} = 0.0025)$

$P(x) = \frac{e^{-m}.\, m^x}{x!}$ $x = 2$, મૂકતાં $P(2) = \frac{e^{-m}.\, m^2}{2!} = \frac{e^{-m}.\, m^2}{2}$

$P(x) = \frac{e^{-m}.\, m^x}{x!}$ $x = 4$, મૂકતાં $P(4) = \frac{e^{-m}.\, m^4}{4!} = \frac{e^{-m}.\, m^4}{24}$

હવે, $3.P(x = 2) = P(x = 4)$

$$3.\frac{e^{-m}.\, m^2}{2} = \frac{e^{-m}.\, m^4}{24}$$

$$\frac{3 \times 24}{2} = \frac{e^{-m}.\, m^4}{e^{-m}.\, m^2}$$

36 = m^2 માટે 6 = m

માટે મધ્યક **m** = 6 અને વિચરણ **m** = 6 થાય

P($x \le 2$) , માટે સંભાવના **= P(0)+P(1)+P(2)** થાય

જ્યાં x **= 0, 1, 2** અને **m = 6** લો અને **P(0)**, **P(**1**)**, **P(**2**)** નો સરવાળો કરો.

=0.0625

Ex : 16 જો એક પોયસન ચલ x માટે **P**$(x = 0) = P(x = 1)$ **= K** હોય તો સાબિત કરો કે **K =** $\frac{1}{e}$

P$(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 0$ મૂકતાં, **P(0) =** $\frac{e^{-m}.\ m^0}{0!}$ **=** $\frac{e^{-m}.\ 1}{1}$

P$(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 1$ મૂકતાં, **P(1) =** $\frac{e^{-m}.\ m^1}{1!}$ **=** $\frac{e^{-m}.\ m^1}{1}$

હવે, **P**$(x = 0) = P(x = 1)$

$$\frac{e^{-m}.\ 1}{1} = \frac{e^{-m}.\ m^1}{1}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{e^{-m}.\ m}{e^{-m}.\ 1}$$

1 = m મધ્યક

P$(x = 0) = K$ માં $x = 0$ **m = 1** મૂકતાં

P$(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ **= K ,** **P(0) =** $\frac{e^{-1}.\ 1^0}{0!}$ **= K**

$$\frac{e^{-1} \times 1}{1} = K$$

$$e^{-1} = K$$

K = $\frac{1}{e}$ થાય

$P(x = 1) = K$ માં $x = 1$, m = 1 મૂકતાં

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ = K , P(1) = $\frac{e^{-1}.\ 1^1}{1!}$ = K

$\frac{e^{-1} \times 1}{1}$ = K

e^{-1} = K

K = $\frac{1}{e}$ થાય

Ex : 19 જો x એક પોયસન ચલ હોય અને $P(x = 0) = 0.05$ હોય તો $P(x > 2)$ = **0.575** થાય એમ દર્શાવો. ($e^{-3} = 0.05$, $e^{-0.05} = 0.9512$)

અહીં $P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ માં $x = 0$ મૂકતાં

$P(0) = \frac{e^{-m}.\ m^0}{0!}$ = 0.05 ,

$P(0) = \frac{e^{-m}.\ 1}{1}$ = 0.05

= e^{-m} = 0.05 છે જેના પરથી મધ્યક m = 3 થાય

$P(x > 2)$ = **0.575** થાય એમ દર્શાવો

જેમાં 2 થી વધુની સંભાવના આવે એટલે કે = **P(3)+P(4)+......** આવે

માટે = 1- **P(0)+P(1) +P(2)** થાય

$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$ $x = 0$, m = 3 મૂકતા

$P(0) = \frac{e^{-3}.\ (3)^0}{0!} = \frac{0.05 \times 1}{1}$ = 0.05 (0! = 1)

$$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!} \quad x = 1, m = 3 \text{ મૂકતા}$$

$$P(1) = \frac{e^{-3}.\ (3)^1}{1!} = \frac{0.05 \times 3}{1} = 0.15 \quad (1! = 1)$$

$$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!} \quad x = 2, m = 3 \text{ મૂકતા}$$

$$P(2) = \frac{e^{-3}.\ (3)^2}{2!} = \frac{0.05 \times 9}{2} = 0.225 \quad (2! = 2\times1)$$

$= 1 -\ P(0)+P(1)+P(2) \quad = 1- 0.05+0.15+0.225$

$= 1- 0.425$

$P(x > 2) = 0.575$ થાય

Ex : 20 એક ટાઈપિસ્ટે ટાઈપ કરેલાં 100 પાનામાં પાનાદીઠ કરેલી ભૂલો નીચે પ્રમાણે છે. તે ઉપરથી પોયસન વિતરણની મદદથી ભૂલોની સંખ્યાઓ માટે અપેક્ષિત આવૃત્તિઓ શોધો. $(e^{-1} = 0.368)$

પાનાદીઠ ભૂલની સંખ્યા	0	1	2	3	4	5
પાનાની સંખ્યા	42	33	14	6	4	1

પાનાદીઠ ભૂલની સંખ્યા xi	પાનાની સંખ્યા fi	fixi	P(x)	અપેક્ષિત આવૃત્તિ P(x).N
0	42	0	0.368	36.8
1	33	33	0.368	36.8
2	14	28	0.184	18.4
3	6	18	0.0613	6.13
4	4	16	0.0153	1.53
5	1	5	0.0031	0.31
	N= 100	$\sum fx$ =100		

મધ્યક m = $\frac{\sum fixi}{N}$, = $\frac{100}{100}$ m = 1 થાય

$$P(x) = \frac{e^{-m}.\ m^x}{x!}$$

$$P(0) = \frac{e^{-1}.\ (1)^0}{0!} = \frac{0.368\times 1}{1} = 0.368$$

$$P(1) = \frac{e^{-1}.\ (1)^1}{1!} = \frac{0.368\times 1}{1} = 0.368$$

$$P(2) = \frac{e^{-1}.\ (1)^2}{2!} = \frac{0.368\times 1}{2} = 0.184$$

$$P(3) = \frac{e^{-1}.\ (1)^3}{3!} = \frac{0.368\times 1}{6} = 0.0613$$

$$P(4) = \frac{e^{-1}.\ (1)^4}{4!} = \frac{0.368\times 1}{24} = 0.0153$$

$$P(5) = \frac{e^{-1}.\,(1)^5}{5!} = \frac{0.368\times 1}{120} = 0.0031$$

2. અતિ ગુણોત્તર વિતરણ-

દ્વિપદી વિતરણની જેમ જ કોઈ પણ પ્રયોગમાં જ્યારે બે જ પરિણામો સફળતા અને નિષ્ફળતા મળતાં હોય,પરંતુ દરેક પ્રયત્નમાં સફળતાની સંભાવના બદલાતી હોય ત્યારે દ્વિપદી વિતરણને બદલે અતિગુણોત્તર વિતરણનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

જો કોઈ એક સમષ્ટિના એકમોને કોઈ એક લક્ષણના સંદર્ભમાં બે વિભાગમાં વહેંચી શકાતા હોય એટલે કે તે લક્ષણ ધરાવતા એકમો અને તે લક્ષણ ન ધરાવતા એકમો અને તે સમષ્ટિમાંથી યદચ્છ રીતે પુરવણીરહિત એક પછી એક એકમો લેવામાં આવે તો નિદર્શમાં તે લક્ષણ ધરાવતા એકમોની જુદી જુદી સંખ્યાની સંભાવના મેળવવા માટે અતિગુણોત્તર વિતરણનો ઉપયોગ થાય છે. અતિ ગુણોત્તર વિતરણ માટે નીચેની શરતો આવશ્યક છે.

(1) દરેક પ્રયત્નના પરિણામને બે વિભાગમાં વહેંચી શકાય સફળતા અને નિષ્ફળતા.
(2) એક પછી એક લેવામાં આવતા એકમોની સફળતાની સંભાવના બદલાતી હોય એટલે કે દરેક પ્રયત્નમાં પરિણામો નિરપેક્ષ હોતાં નથી.
(3) અમુક ચોક્કસ સંખ્યામાં પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરવામાં આવે.

અતિ ગુણોત્તર વિતરણનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$ જ્યાં x = 0,1,2.....r

X ની જુદી જુદી કિંમતો માટે એટલે કે સફળતાની જુદી જુદી સંખ્યા માટે સંભાવના શોધવા ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકાય. આ સંભાવના વિતરણને અતિ ગુણેત્તર વિતરણ કહે છે.

- અતિ ગુણોત્તર વિતરણના ગુણધર્મો અને ઉપયોગ
  - (1) આ એક અસતત ચલનું સંભાવના વિતરણ છે.
  - (2) m, n અને r તેના પ્રાચલો છે.
  - (3) તેનો મધ્યક = $\frac{mr}{m+n}$
  - (4) અતિ ગુણોત્તર વિતરણનું વિચરણ = $\frac{mnr(m+n-r)}{(m+n)^2\,(m+n-1)}$
  - (5) જ્યારે (m+n) ની કિંમત ખૂબ મોટી હોય ત્યારે અતિ ગુણોત્તર વિતરણ દ્વિપદી વિતરણને અનુસરે છે.
- અતિ ગુણોત્તર વિતરણના ઉપયોગો.
  - (1) કોઈ પણ પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન થતું હોય અને પ્રયત્નદીઠ સફળતાની સંભાવના બદલાતી જતી હોય ત્યારે સફળતાની સંખ્યાનું અનુમાન કરવા.
  - (2) સ્વીકૃતિ નિદર્શનમાં આ વિતરણનો વ્યાપક પ્રમાણમાં ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

Ex : 2 એક ડબ્બામાં 5 લાલ અને 7 સફેદ દડા છે તેમાંથી એક પછી એક 4 દડા લેવામાં આવે તો,(1) 2 લાલ અને 2 સફેદ દડા હોય (2) બધા જ દડા એક જ રંગના હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં 5 લાલ + 7 સફેદ = 12 કુલ દડા છે.

(1) 2 લાલ અને 2 સફેદ દડા હોય તેની સંભાવના

$= \dfrac{{}^{5}C_2 \times {}^{7}C_2}{{}^{12}C_4}$ $= \frac{5\times4}{2\times1}$ $=\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}$

$= \frac{10\times21}{495}$ $= \frac{210}{495}$ = 0.4242

(2) બધા જ દડા એક જ રંગના હોય એટલે કે ચારેય દડા લાલ હોય અથવા ચારેય દડા સફેદ હોય તેની સંભાવના

$= \dfrac{{}^{5}C_4 + {}^{7}C_4}{{}^{12}C_4}$

$= \frac{5+35}{495}$ $= \frac{40}{495}$ = 0.0808

Ex : 5 એક પેકેટમાં 40 સ્ક્રૂ છે, જેમાં 5 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે .જો તે પેકેટમાંથી યદચ્છ રીતે 10 સ્ક્રૂ લેવામાં આવે તો તેમાં એક પણ સ્ક્રૂ ખામીવાળો ન હોય તેની સંભાવના શોધો. ઉપરાંત ખામીવાળા સ્ક્રૂનો મધ્યક અને વિચરણ પણ મેળવો.

ખામીવાળા સ્ક્રૂની સંખ્યા m = 5

ખામીવગરના સ્ક્રૂની સંખ્યા n = 35

કુલ સ્ક્રૂ = 5+35 = 40 , r = 10

એક પણ સ્ક્રૂ ખામીવાળો ન હોય તેની સંભાવના એટલે કે x = 0

$= \quad P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

$= \; P(0) = \frac{5c_0 \times 35c_{(10-0)}}{(5+35)c_{10}}$ $= \frac{1\times 35c_{(10)}}{(40)c_{10}}$ $= \dfrac{\frac{1\times35!}{10!25!}}{\frac{40!}{10!30!}}$

$= \frac{1\times35!}{10!25!} \times \frac{10!30!}{40!} \quad = \frac{1\times35!}{25!} \times \frac{30\times29\times28\times27\times26\times25!}{40\times39\times38\times37\times36\times35!}$

$= \frac{30\times29\times28\times27\times26}{40\times39\times38\times37\times36} = \frac{17100720}{78960960}$ = 0.2166

મધ્યક = $\frac{mr}{m+n} = \frac{5\times10}{5+35} = \frac{50}{40}$ = 1.25

વિચરણ $= \frac{5\times35\times10(5+35-10)}{(5+35)^2\,(5+35-1)} = \frac{1750(40-10)}{(40)^2\,(40-1)} = \frac{1750(30)}{1600\,(39)}$

$= \frac{52500}{62400}$ = 0.84

Ex : 6 એક જથ્થામાં 50 બલ્બ છે, જેમાં 10 ટકા બલ્બ ખામીવાળા છે. તે જથ્થામાંથી એક પછી એક એમ 5 બલ્બ લેવામાં આવે તો તે પૈકી (1) એક પણ બલ્બ ખામીવાળો ન હોય (2) વધુમાં વધુ 2 બલ્બ ખામીવાળા હોય તેની સંભાવના શોધો.

ખામીવાળા બલ્બની સંખ્યા m = 5

ખામીવગરના બલ્બની સંખ્યા n = 45

કુલ બલ્બ = 5+45 = 50 , r = 5

એક પણ બલ્બ ખામીવાળો ન હોય તેની સંભાવના એટલે કે x = 0

$= \quad P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

$= \quad P(0) = \frac{5c_0 \times 45c_{(5-0)}}{(5+45)c_5}$

$= \frac{1\times 45c_{(5)}}{(50)c_5} = 45c_{(5)} = \frac{45\times44\times43\times42\times41}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{146611080}{120}$ = 1221759

$= (50)c_5 \quad = \frac{50\times49\times48\times47\times46}{5\times4\times3\times2\times1} \quad = \frac{254251200}{120} \quad = 2118760$

$= \frac{1\times1221759}{2118760} \quad = 0.5766$

(2) વધુમા વધુ 2 બલ્બ ખામીવાળા હોય તેની સંભાવના

એટલે કે $x \leq 2$ $\quad x = 0,1,2$ થાય $\quad = P(0)+P(1)+P(2)$

$= \quad P(x) = \frac{mc_x\times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

$$= \frac{5c_0\times 45c_{(5-0)}}{(50)c_5} + \frac{5c_1\times 45c_{(5-1)}}{(50)c_5} + \frac{5c_2\times 45c_{(5-2)}}{(50)c_5}$$

$= \frac{1\times 45c_{(5)}}{(50)c_5} + \frac{5\times 45c_{(4)}}{(50)c_5} + \frac{10\times 45c_{(3)}}{(50)c_5} \qquad = 45c_{(4)} = \frac{45\times44\times43\times42}{4\times3\times2\times1} = 148995$

$= 45c_{(3)} = \frac{45\times44\times43}{3\times2\times1} \qquad = 14190$

$= \frac{1\times1221759+5\times148995+10\times14190}{2118760}$

$= \frac{1221759+744975+141900}{2118760} \quad = \frac{2108634}{2118760} \quad = 0.9952$

Ex :7 52 પત્તાની જોડમાંથી યદચ્છ રીતે 3 પત્તાં લેવામાં આવે તો

(1) ત્રણેય પત્તા કાળીના હોય

(2) ત્રણેય એક્કા હોય તેની સંભાવના શોધો.

કાળીના પત્તા m = 13

અન્યપત્તા n = 39

કુલ પત્તા = 13+39 = 52 , r = 3

(1) ત્રણેય પત્તા કાળીના હોય એટલે કે x = 3

= $P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

= $P(3) = \frac{13c_3 \times 39c_{(3-3)}}{(13+39)c_3}$

= $\frac{13c_3 \times 39c_{(0)}}{(52)c_3}$ = $13c_3$ = $\frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1}$ = $\frac{1716}{6}$ = 286

= $52c_{(3)}$ = $\frac{52 \times 51 \times 50}{3 \times 2 \times 1}$ = $\frac{132600}{6}$ = 22100

= $\frac{286 \times 1}{22100}$ = $\frac{286}{22100}$ = 0.01294

(2) ત્રણેય એક્કા હોય તેની સંભાવના x = 3

એક્કાના પત્તા m = 4

અન્યપત્તા n = 48

કુલ પત્તા = 4+48 = 52 , r = 3 , x = 3

= $P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

= $P(3) = \frac{4c_3 \times 48c_{(3-3)}}{(4+48)c_3}$

= $\frac{4 \times 48c_{(0)}}{(52)c_3}$ = $4c_3$ = $\frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1}$ = 4

$= 52c_{(3)} = \frac{52\times51\times50}{3\times2\times1} = \frac{132600}{6}$ = 22100

$= \frac{4\times 1}{22100} = \frac{4}{22100}$ = 0.0001810

Ex : 8 એક કંપની પાસે 12 એમ્બેસેડર અને 8 ફિયાટ કાર છે, તેમાંથી 5 કાર વર્કશોપમાં રિપેર માટે ગયેલી છે, તો (1) તેમાંથી 3 એમ્બેસેડર અને 2 ફિયાટ કાર (2) ઓછાંમાં ઓછી 3 ફિયાટ કાર હોય(3) બધી જ કાર એક જ પ્રકારની હોય તેની સંભાવના શોધો.

12 એમ્બેસેડર અને 8 ફિયાટ કાર કુલ = 20 કાર છે.

(1) તેમાંથી 3 એમ્બેસેડર અને 2 ફિયાટ કાર

$= \frac{{}^{12}C_3 \times {}^{8}C_2}{{}^{20}C_5}$ $= {}^{12}C_3 = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$ $= {}^{8}C_2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$

$= {}^{20}C_5 = \frac{20\times19\times18\times17\times16}{5\times4\times3\times2\times1} = 15504$

$= \frac{220\times28}{15504}$

$= \frac{6160}{15504}$ = 0.3973

(2) ઓછાંમાં ઓછી 3 ફિયાટ કાર હોય એટલે કે $x \geq 3$ માટે 3, 4,5 થાય

અહીં 3 ફિયાટ અને 2 એમ્બેસેર

અથવા

4 ફિયાટ અને 1 એમ્બેસેડર

અથવા

5 ફિયાટ અને 0 એમ્બેસેડર

$= \frac{{}^{8}C_3 \times {}^{12}C_2}{{}^{20}C_5} + \frac{{}^{8}C_4 \times {}^{12}C_1}{{}^{20}C_5} + \frac{{}^{8}C_5 \times {}^{12}C_0}{{}^{20}C_5}$

$= \frac{56 \times 66 + 70 \times 12 + 56 \times 1}{15504}$

$= \frac{3696+840+56}{15504} = \frac{4592}{15504} = 0.2961$

(3) બધી જ કાર એક જ પ્રકારની હોય એટલે કે 5 એમ્બેસેડર અથવા 5 ફિયાટ હોય

$= \frac{{}^{12}C_5 + {}^{8}C_5}{{}^{20}C_5} = \frac{792+56}{15504} = \frac{848}{15504} = 0.0547$

Ex : 11 52 પત્તાની જોડમાંથી 4 પત્તા યાદચ્છિક રીતે લેવામાં આવે તો તેમાં વધુમાં વધુ 1 પત્તું લાલનું હોય તેની સંભવના શોધો.

લાલના પત્તા $m = 13$

અન્યપત્તા $n = 39$

કુલ પત્તા = 13+39 = 52 , $r = 4$

વધુમાં વધુ 1 પત્તું હોય એટલે કે $x \leq 1$ થાય

= P(0)+P(1)

$= P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

$= \frac{13c_0 \times 39c_{(4-0)}}{(52)c_4} + \frac{13c_1 \times 39c_{(4-1)}}{(52)c_4}$

$= \frac{1\times 39c_{(4)}}{(52)c_4} + \frac{13\times 39c_{(3)}}{(52)c_4}$ $\qquad = 39c_{(4)} = \frac{39\times38\times37\times36}{4\times3\times2\times1} = 82251$

$= 52c_{(4)} = \frac{52\times51\times50\times49}{4\times3\times2\times1} = 270725$

$= \frac{1\times82251+13\times9139}{270725}$

$= \frac{82251+118807}{270725} = \frac{201058}{270725} = 0.7427$

EX : 12(B) એક સમૂહમાં 5 છોકરાઓ અને 7 છોકરીઓ છે. એક પછી એક 4 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવામાં આવે તો (1) 2 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ (2) બધા જ છોકરાઓ અથવા બધી જ છોકરીઓની પસંદગીની સંભાવના શોધો.

5 છોકરાઓ અને 7 છોકરીઓ કુલ = 12 તેમાંથી 4 વ્યક્તિની પસંદગી કરવાની છે

(1) 2 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ હોય તેની સંભાવના

$= \frac{{}^5C_2 \times {}^7C_2}{{}^{12}C_4}$ $\qquad = {}^{12}C_4 = \frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1} = 495$

$= \frac{10\times21}{495} = \frac{210}{495} = 0.4242$

(2) બધા જ છોકરાઓ અથવા બધી જ છોકરીઓની પસંદગીની સંભાવના એટલે કે 4 છોકરા અથવા 4 છોકરીઓની પસંદગી

$= \frac{{}^5C_4 + {}^7C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{5+35}{495} = \frac{40}{495} = 0.0808$

Ex : 13(b) એક જથ્થામાં 50 સ્ક્રૂ છે, જેમાં 2 % સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. તેમાંથી 10 સ્ક્રૂ યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે છે. તેમાં બધા જ સ્ક્રૂ સારા હોય તેની સંભાવના શોધો. વળી પસંદ કરેલા નિદર્શમાં ખામીવાળા સ્ક્રૂનો મધ્યક શોધો.

ખામીવાળા સ્ક્રૂની સંખ્યા m = 1

ખામીવગરના સ્ક્રૂની સંખ્યા n = 49

કુલ સ્ક્રૂ = 1+49 = 50 , r = 10

બધા જ સ્ક્રૂ સારા હોય તેની સંભાવના એટલે કે x = 0

= $P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

= $P(0) = \frac{1c_0 \times 49c_{(10-0)}}{(1+49)c_{10}}$ = $\frac{1\times 49c_{(10)}}{(50)c_{10}}$ = $\frac{\frac{1\times49!}{10!39!}}{\frac{50!}{10!40!}}$

= $\frac{1\times49!}{10!39!} \times \frac{10!40!}{50!}$ = $\frac{1\times49!}{39!} \times \frac{40\times39!}{50\times49!}$ = $\frac{40}{50}$ = 0.8

મધ્યક = $\frac{m\times r}{m+n}$ = $\frac{1\times10}{1+49}$ = $\frac{10}{50}$ = 0.2

Ex : 14 (b) એક ટોપલીમાં બે ડઝન કેરી છે, જે પૈકી 3 કેરી બગડેલી છે. આ ટોપલીમાંથી 4 કેરી પસંદ કરવામાં આવે તો તેમાં ઓછામાં ઓછી એક કેરી બગડેલી હોવાની સંભાવના શોધો.

બગડેલી કેરીની સંખ્યા m = 3

સારી કેરીની સંખ્યા n = 21

કુલ કેરીની સંખ્યા = 3+21 = 24 તોમાંથી 4 કેરીની પસંદગી કરવામાં આવે તો , ઓછામાં ઓછી એક કેરી બગડેલી હોય તેની સંભાવન

= $x \geq 1$ = P(1)+(2)+P(3)

= 1- P(0) = $P(x) = \frac{mc_x \times nc_{(r-x)}}{(m+n)c_r}$

= $P(0) = \frac{3c_0 \times 21c_{(4-0)}}{(3+21)c_4}$ = $\frac{1\times 21c_{(4)}}{(24)c_4}$ = $\frac{5985}{10626}$ = 0.5632

= 1- 0.5632
= 0.4368