યુનિટ નં – 1

1. વિધેય : -

વિધેયની વ્યાખ્યા : જો A અને B ખાલી ન હોય તેવા (અરિક્ત) ગણો હોય અને ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટકને B ના અનન્ય ઘટક સાથે કોઈ સંબંધ કે સંગતતા દ્વારા સાંકળી શકાતો હોય તો તેવી સંગતતાને A થી B પરનું વિધેય કહેવામાં આવે છે. જો f આવી સંગતતા હોય તો તેને સંકેતમા $f : A \to B$ વડે દર્શાવાય છે. અને f એ A માંથી B પરનું વિધેય છે.

વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર

જો $f : A \to B$ હોય તો ગણ A ને વિધેય નો f પ્રદેશ અને ગણ B ને વિધેય f નો સહપ્રદેશ કહેવામાં આવે છે. વિધેયના પ્રદેશનેDf (Domain of function) વડે દર્શાવવામાં આવે છે પ્રદેશગણના દરેકે દરેક ઘટકને સહપ્રદેશના અનન્ય ઘટકો સાથે સંગતતા f દ્વારા સાંકળી શકાતા હોવા જોઈએ. બીજી રીતે પ્રદેશના પ્રત્યેક ઘટકનું પ્રતિબિંબ સહપ્રદેશમાં હોવું જોઈએ. વિધેય દર્શાવવા માટે f, g, h, t વગેરે જેવ સંકેતનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. પ્રદેશના પ્રત્યેક ઘટક x માટે વિધેય f દ્વારા જે પ્રતિબિંબ મળે તેને $f(x)$ તરીકે દર્શાવાય છે.

જો 2 $\in A$ હોય તો તેના પ્રતિબિંબને $f(2)$ વડે દર્શાવાય છે. વિધેય f દ્વારા મળતાં બધાં જ પ્રતિબિંબોના ગણને વિધેય f નો વિસ્તાર કહેવામાં આવે છે અને તને સંકેત $f(\mathrm{A})$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. $f(\mathrm{A}) = \{f(\mathrm{x})/\ \mathrm{x} \in A\}$

Aના બધા જ ઘટકોનાં પ્રતિબિંબોનો ગણ એટલે કે વિધેયનો વિસ્તાર વિધેય f ના સહપ્રદેશ B નો ઉપગણ થાય તેથી $f(\mathrm{A})CB$ વિસ્તારને Rf (Range of function) વડે દર્શાવવામાં આવે છે. અહીં બરાબર સમજી લેવું જોઈએ કે વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશનો ઉપગણ અથવા સહપ્રદેશ પોતે જ હોય છે.

$f : A \rightarrow B$; A= $\{1,2,3,\}$; B = $\{1,2,3,4,5,6,7\}$; $f(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}$ વિધેયનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર દર્શાવો.

પ્રદેશ Df = $\{1,2,3,\}$;

સહપ્રદેશ B = $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

વિસ્તાર Rf = $\{f(1), f(2), f(3)\}$

= $\{2(1), 2(2), 2(3)\}$

= $\{2, 4, 6\}$

વિસ્તાર સહપ્રદેશ B નો ઉપગણ છે.

$f : A \rightarrow N$; $f(\mathrm{x}) = 4\mathrm{x} + 3$

A = $\{1,2,3,\}$વિધેયનોપ્રદેશ,સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર સ્પષ્ટ કરો.

પ્રદેશ Df = $\{1,2,3,\}$;

સહપ્રદેશ N

વિસ્તાર Rf = $\{f(1), f(2), f(3)\}$

$= \{4(1)+3; 4(2)+3; 4(3)+3\}$

$= \{7, 11, 15\}$

વિધેયના પ્રકાર વિધેયના મુખ્ય ત્રણ પ્રકારો નીચે મુજબ છે.

(1) એક- એક વિધેય

ધારો કે $f : A \to B$ છે, જો A ના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકો માટે B માંથી મળતાં સંગત પ્રતિબિંબો પણ ભિન્ન હોય તો વિધેય f ને એક એક વિધેય કહેવામાં આવેછે.

$f : A \to B$ હોય અને $a1 \neq a2$; $a1, a2 \in A$ માટે $f(\mathrm{a1}) \neq f(\mathrm{a2})$ થાય તો f એ એક એક વિધેય થાય.જો A વિદ્યાર્થીઓના નામનો ગણ હોય અને B તેમના રોલ નંબરનો ગણ હોય તો નામના ગણ અને તેમના રોલ નંબરના ગણ વચ્ચેની સંગતતાથી જે વિધેય મળે તે એક એક વિધેય છે.

જો $f : A \to B$ A= $\{1,2,3,\}$, B = $\{1,2,3,4,5,6\}$

$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + 2$ હોય તો $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, $f(3) = 5$ આમ A ના ભિન્ન ભિન્ન ઘટકો માટે B માં પ્રતિબિંબ ભિન્ન ભિન્ન છે. તેથી વિધેય એક એક વિધેય છે.

(2) અનેક – એક વિધેય

ધારોકે $f : A \rightarrow B$ છે.જો Aના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકોનાં સંગત પ્રતિબિંબો સમાન હોય તો વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહેવામાં આવે છે.એટલે કે $f : A \rightarrow B$ હોય,અને $a1 \neq a2$; $a1, a2 \in A$ માટે $f(\mathrm{a1}) = f(\mathrm{a2})$ માટે થાય તો f ને અનેક – એક વિધેય કહેવાય.

જો $f(x) = \mathrm{x}^2, x \in Z$ હોય તો $f(-1) = 1$ $f(1) = 1$ મળે છે. આમ $x \in Z$ ને બે અલગ ઘટકો માટે એક જ પ્રતિબિંબ મળે છે.તેથી $f(x) = \mathrm{x}^2, x \in Z$ એ અનેક-એક વિધેય છે.

(3) અચળ વિધેય

ધારોકે $f : A \rightarrow B$ છે. જો Aના દરેક ઘટકને સંગત પ્રતિબિંબ એક જ હોયતો વિધેય f ને અચળ વિધેય કહેવામાં આવે છે.

જો $f : N \rightarrow N,\ f(x) = 5$ હોય તો

$f(1) = 5, f(2) = 5$ $f(3) = 5$.... તેથી એ f અચળ વિધેય છે

(4) સમાન વિધેય

જો બે વિધેયો f અને g એક જ પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલાં હોય અને પ્રદેશ ગણના દરેક ઘટક 'a' માટે $f(a) = g(a)$ થાય તો વિધેય f અને g સમાન વિધેય છે એમ કહેવાય અને f = g એમ દર્શાવાય.

જો $f : A \to B$ તથા $g : A \to C$ હોય અને પ્રત્યેક a$\in A$ માટે $f(a) = g(a)$ થાય તો f અને g સમાન વિધેયો છે એમ કહેવાય. વિધેયો f અને g નો પ્રદેશ ગણ એક જ હોવો જોઈએ એ મુખ્ય શરત છે.

$f : A \to B \;\; f(x) = \mathrm{x}^2$;

$g : A \to C,\; g(x) =$ 4x – 3 અને A = $\{1, 3\}$ હોય તો

$f(1)$ =(1)^2 = 1; $g(1)$ = 4(1) - 3 = 1

$f(3)$ = 3^2 = 9; $g(3)$ = 4(3) – 3 = 9

આમ ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક માટે વિધેય f અને g દ્વારા મળતાં પ્રતિબિંબો સમાન છે. તેથી $f = g$.

વાસ્તવિક વિધેય

કોઈ પણ વસ્તુની માંગ તેની કિંમત ઉપર આધાર રાખે છે.માંગ અને કિંમત વચ્ચેનો સંબંધ નક્કી કરવામાં આવે તો તે

વાસ્તવિક વિધેય

કોઈ પણ વસ્તુની માંગ તેની કિંમત ઉપર આધાર રાખે છે.માંગ અને કિંમત વચ્ચેનો સંબંધ નક્કી કરવામાં આવે તો તે સંબંધ દર્શાવતા વિધેયને માંગનું વિધેય કહેવાય. માંગ dઅને કિંમત pવચ્ચેનો સંબંધ વિધેય d = $f(p)$ માંગનું વિધેય કહેવાય. તેવી જ રીતે પુરવઠો S અને કિંમત p વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતું વિધેય S = $f(p)$ પુરવઠાનું વિધેય કહેવાય. કોઈ

પણ વસ્તુના ઉત્પાદનમાં થતો કુલ ખર્ચ C ઉત્પાદિત એકમો x ઉપર આધાર રાખે છે તેથી C= $f(x)$ ને ખર્ચનું વિધેય કહે છે.

કોઈ પણ વસ્તુના વેચાણમાંથી થતો કુલ વકરો અથવા આમદાની R, વેચાયેલા એકમોની સંખ્યા x ઉપર આધાર રાખે છે, તેથીR = $f(x)$ આમદાની વિધેય થાય. જો માંગનું વિધેયP = $f(x)$ સ્વરૂપે આપવામાં આવ્યું હોય તો તે ઉપરથી કુલ આમદાની વિધેય નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

કુલ આમદાની = વેચાયેલા એકમો × એકમદીઠ કિંમત

$\therefore$ R(x) = x. p

$\therefore$ = x. $f(x)$

માગ, પુરવઠો, આમદાની વગેરે વાસ્તવિક હકીકતો રજૂ કરતાં હોઈ તે વાસ્તવિક વિધેયો છે.

સમતૂટ બિંદુ

કોઈ પણ વસ્તુના x એકમો બનાવવાનો કુલ ખર્ચ C(x) બે ભાગનો બનેલો હોય છે.

(1) અચલ ખર્ચ (2) ચલિત ખર્ચ.

$\therefore$ C(X) = F + V(x)

જયાં V(x) વસ્તુના x એકમો બનાવવાનો ચલિત ખર્ચ દર્શાવે છે. અને F સ્થિર અથવા અચળ ખર્ચ દર્શાવે છે.

x એકમોના વેચાણમાંથી મળતી કુલ આવકને આપણે આમદાની વિધેય $R(x)$ તરીકે દર્શાવીએ છીએ. જો x એકમો દરેકને p ના ભાવે વેચાવામાં આવે તો $R(x) = p.x$

x વસ્તુઓના વેચાણમાંથી મળતા નફાને $P(x)$ અથવા π તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે.

સ્પષ્ટ છે કે

કુલ નફો = કુલ આમદાની – કુલ ખર્ચ

$\therefore P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x)$ ને નફાનું વિધેય કહે છે.

સમતૂટ બિંદુ શોધવા માટે

કોઈ પણ પેઢી માટે સમતૂટ બિંદુ એટલે ઉત્પાદનનો એવો જથ્થો કે જેથી પેઢીને નફો કે નુકસાન થાય નહિ એટલે કે સમતૂટ બિંદુએ કુલ આમદાની અને કુલ ખર્ચ સરખા થાય એટલે કે $R(x) = C(x)$

આ શરત ઉપરથી સમતૂટ બિંદુ માટે x ની કિંમત મળી શકે.

સુરેખ વિધેય

x અને y વચ્ચેના સુરેખ વિધેયનું સામાન્ય સ્વરૂપ $y = ax + b$ વડે દર્શાવી શકાય જ્યાં a અને b અચલ સંખ્યાઓ હોય. સુરેખ વિધેય નો આલેખ દોરવામાં આવે તો તે સુરેખા દર્શાવે છે.

દ્વિઘાતી વિધેય

x અને y વચ્ચેના દ્વિઘાતી વિધેયનું સામન્ય સ્વરૂપ

$y = ax^2 + bx + c$ વડે દર્શાવી શકાય જ્યાં a, b, c અચલ સંખ્યાઓ હોય.

લક્ષ

$f(x) = x + 2$ એ x નું વિધેય હોય x ની જુદી જુદી કિંમતો માટે તે વિધેયની જુદી જુદી કિંમતો મળે છે

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x-1}$$

$$f(2) = \frac{2^2 - 1}{2-1} = 3$$

$$f(4) = \frac{4^2 - 1}{4 - 1} = 5$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$f(0) = \frac{0^2 - 1}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

અહીં xની જુદી જુદી કિંમતો 2,4 માટે $f(x)$ ની ચોક્કસ કિંમતો મળેછે.પરંતુ x=1 મૂકવામાં આવે છે ત્યારે વિધેયનું સ્વરૂપ $\frac{0}{0}$ થાય છે.એટલે કે વિધેયની કિંમત મળતી નથી પરંતુ અનિશ્ચિત રૂપ મળે છે. અર્થાત x=1 આગળ વિધેય વ્યાખ્યાયિત

નથી. xની કિંમત 1 લેવાને બદલે 1ની નજીક લેવામાં આવે તો વિધેયની કિંમતો કેવી મળે તે જોઈએ.

$$f(1.1) = \frac{1.1^2 - 1}{1.1 - 1} = 2.1$$

$$f(0.99) = \frac{0.99^2 - 1}{0.99 - 1} = 1.99$$

$$f(1.01) = \frac{1.01^2 - 1}{1.01 - 1} = 2.01$$

આમ X= 1 હોય ત્યારે $f(x)$ નું સ્વરૂપ અનિશ્ચિત મળે છે ,પરંતુ x ની કિંમત 1ની નજીક હોય ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત મળી શકે છે અને તે ઉપર મુજબ 2 ની નજીક હોય તેવું અનુમાન કરી શકાય છે. X ની કિંમત 1ની નજીક આવે અથવા 1ની સમીપમાં લેવામાં આવે છે તે ખ્યાલ અતિ મહત્વનો છે. xની લેવામાં આવતી કિંમત અને 1વચ્ચેના તફાવતને સામીપ્ય કહે છે.આ સામીપ્યને લગભગ શૂન્યવત્ કરી નાખવાથી વિધેયની મળતી કિંમતને તે વિધેયનું લક્ષ કહેવામાં આવે છે. X ની કિંમતો 1ની વધુ ને વધુ નજીક લેવામાં આવે તેને x 1ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય છે અને $x \to 1$સંકેત દ્વારા દર્શાવાય છે.

$x \to a$ નો અર્થ – જો કોઈ ચલરાશિ x ની કિંમત ઘટાડતાં ઘટાડતાં કે વધારતાં વધારતાં કોઈ એક ચોક્કસ સંખ્યા a ની અત્યંત નજીક લઈજવામાં આવે તો x, a ને અલુલક્ષે છે, એમ

કહેવાય અને તેને સંકેતમાં $x \to a$ તરીકે દર્શાવાય છે. $x \to a$ એટલે $x = a$ નહીં

દા.ત. ની 2.1,2.01, 2.001.... વગેરે કિંમતો લેવાથી x ની કિંમતો ઘટાડતાં ઘટાડતાં 2ની નજીક લઈ જવામાં આવે છે,એમ કહોવાય અને x ની કિંમત 1.9,1.99,1.999 વગેરે લેવાથી x ની કિંમતો વધારતાં વધારતાં 2ની નજીક લઈ જવામાં આવે છે એમ કહેવાય અને $x \to 2$સંકેત દ્વારા દર્શાવાય. $x \to 2$ એટલે $x = 2$ નહીં

<u>$x \to 0$ નો અર્થ –</u> જ્યારે કોઈ ચલરાશિ x ની કિંમત ધનકિંમતો દ્વારા ઘટાડતાં ઘટાડતાં કેઋણ કિંમતો દ્વારા વધારતાં વધારતાં 0 ની અત્યંત નજીક લઈ જવામાં આવે તો x, શૂન્ય ને અનુલક્ષે છે, એમ કહેવાય અને તેને સંકેતમાં $x \to 0$ તરીકે દર્શાવાય છે. $x \to 0$ એટલે $x = 0$ નહીં

દા.ત. 0.1, 0.01,0.001 વગેરે કિંમતો લેવાથી x ધન બાજુથી શૂન્યને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય.જ્યારે $x = 0$ -0.1,-0.01,-0.001 વગેરેકિંમતો લેવાથી x ઋણ બાજુથી શૂન્યને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય.અને $x \to 0$ એમ દર્શાવાય $x \to 0$ એટલે $x = 0$ નહીં

<u>$x \to \infty$ નો અર્થ</u> – ધારોકે ચલરાશિ x ની કિંમત મોટી અને મોટી કરતાં જઈએ અને એક ખૂબ જ મોટી સંખ્યા N ની કલ્પના કરીએ તો x ની કિંમત મોટી ને મોટી લેવાથી એક પરિસ્થિતિ

એવી આવશે કે x ની N કિંમત કરતાં પણ મોટી થશે. આમ થાય તો x અનંતને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય છે અને $x \to \infty$ તરીકે દર્શાવાય છે. ∞ એ કોઈ સંખ્યા નથી એટલે $x = \infty$ લખી શકાય નહીં.

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ નો અર્થ

ધારોકે $f(x)$ એ વાસ્તવિક ચલ x નું વાસ્તવિક વિધેય છે. જો ચલ x ની કિંમત કોઈ એક સંખ્યા a ની વધુ ને વધુ નજીક લઈ જવામાં આવે ત્યારે વિધેય $f(x)$ નું મૂલ્ય કોઈ નિશ્ચિત સંખ્યા l ની વધુ ને વધુ નજીક જાય તો એમ કહેવાય કે જ્યારે x, a ને અનુલક્ષે છે ત્યારે વિધેય $f(x)$ એ l ને અનુલક્ષે છે અને જ્યારે x$\to a$ ત્યારે $f(x) \to l$ એમ લખાય છે. આ વિધાનને સંકેતમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે.

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

લક્ષના નિયમો

જો $f\,(x)$ અને $g\,(x)$ એ વાસ્તવિક ચલ x નાં વાસ્તવિક વિધેયો હોય અને જો $\lim_{x \to a} f(x) = l$ અને $\lim_{x \to a} g\,(x) = m$ હોય તો તેમના સરવાળા, બાદબાકી,ગુણાકાર અને ભાગાકાર માટેના લક્ષના નિયમો નીચે પ્રમાણે છે.

1. બે વિધેયોના સરવાળા અથવા બાદબાકીનું લક્ષ તે બે વિધેયોના લક્ષના સરવાળા અથવા બાદબાકી બરાબર થાય છે.

$$\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = l \pm m$$

2. બે વિધેયોના ગુણાકારનું લક્ષ તે બે વિધેયોના લક્ષના ગુણાકાર બરાબર થાય છે.

$$\lim_{x \to a}\{f(x) \times g(x)\} = l \times m$$

3. જો છેદના વિધેયનું લક્ષ શૂન્ય ન હોય તો બે વિધેયના ભાગાકારનું લક્ષ તે બે વિધેયના લક્ષના ભાગાકાર બરાબર થાય છે.

$$\lim_{x \to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} = \frac{l}{m} \ (m \neq 0)$$

લક્ષ મેળવવાની રીત

(1) $x \to a$ હોય ત્યારે વિધેય $f(x)$ નું લક્ષ મેળવવું હોય ત્યારે $x = a$ વિધેયમાં મૂકતાં જો પરિમિત કિંમત મળે તો તે પરિમિત કિંમત જ વિધેયનું લક્ષ બને.

(2) જો આપેલા વિધેયમાં $x = a$ મૂકતાં અંશ અને છેદ બંને શૂન્ય થાય તો અંશ અને છેદમાં સામાન્ય $x - a$ અવયવ હોય. આ અવયવને દૂર કરી(1) મુજબ લક્ષ મેળવી શકાય.

(3) જો $x = a$ મૂકવાથી માત્ર છેદ જ શૂન્ય થાય તો વિધેયને લક્ષ નથી એમ કહેવાય.

સાતત્ય

સાતત્યની વ્યાખ્યા

કોઈ પણ વિધેય $f(x)$, $x = a$ આગળ સતત થવા માટે નીચેની શરતો જરૂરી છે.

(1) તે વિધેયની $x = a$ આગળ પરિમિત કિંમત હોવી જોઈએ.

(2) જ્યારે $x \to a$ હોય ત્યારે તે વિધેયનું લક્ષ મળવું જોઈએ.

(3) લક્ષ અને કિંમત બંને સરખાં હોવા જોઈએ.

ટૂંકમાં ની પરિમિત કિંમત હોવી જોઈએ અને

$\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, અને $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોવું જોઈએ,

તેમજ

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ મળવું જોઈએ.

જો આ શરતો પૈકી કોઈ પણ શરતનો ભંગ થાય તો વિધેય $f(x)$, $x = a$ આગળ અસતત છે એમ કહેવાય

લક્ષ

નીચેનાની કિંમત શોધો.

EX : 9 $\lim_{x \to 3} \frac{x+7}{x-2} = \frac{3+7}{3-2} = \frac{10}{1} = 10$

EX : 10 $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8} = \frac{(4)^2-3(4)-4}{(4)^2-2(4)-8} = \frac{16-12-4}{16-8-8} = \frac{0}{0}$

અહીં વિધેયમાં $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે. $x \to 4$ માટે $x - 4$ અવયવ પડશે

$= \lim_{x \to 4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8}, \quad = \frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+2)}, \quad = \frac{x+1}{x+2}, \quad = \frac{4+1}{4+2}, \quad = \frac{5}{6}$

EX : 11 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3} = \frac{(1)^2+(1)-2}{(1)^2-2(1)-3} = \frac{1+1-2}{1+2-3} = \frac{0}{0}$

$x \to 1$ માટે $x - 1$ અવયવ પડશે

$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}, \quad = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}, \quad = \frac{x+2}{x+3}, \quad = \frac{1+2}{1+3}, \quad = \frac{3}{4}$

EX : 12 $\lim_{x \to -3} \frac{2x^2+9x+9}{2x^2+7x+3} = \frac{2(-3)^2+9(-3)+9}{2(-3)^2+7(-3)+3} = \frac{18-27+9}{18-21+3} = \frac{0}{0}$

$x \to -3$ માટે $x + 3$ અવયવ પડશે

$= \lim_{x \to -3} \frac{2x^2+9x+9}{2x^2+7x+3}, = \frac{(x+3)(2x+3)}{(x+3)(2x+1)}, = \frac{2x+3}{2x+1}, = \frac{2(-3)+3}{2(-3)+1}, = \frac{-6+3}{-6+1}, = \frac{-3}{-5}, = \frac{3}{5}$

EX : 13 $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{3x^2+7x+2}{9x^2-1} = \frac{3(-\frac{1}{3})^2+7(-\frac{1}{3})+2}{9(-\frac{1}{3})^2-1} = \frac{\frac{3}{9}-\frac{7}{3}+2}{0} = \frac{\frac{3-21+18}{9}}{0}$

$= \frac{0}{0}$

$x \to -\frac{1}{3}$ માટે $3x + 1$ અવયવ પડશે

$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{3x^2+7x+2}{9x^2-1}, = \frac{(3x+1)(x+2)}{(3x+1)(3x-1)}, \quad = \frac{-\frac{1}{3}+2}{3(-\frac{1}{3})-1}, \quad = \frac{\frac{-1+6}{3}}{-1-1}, = \frac{\frac{5}{3}}{-2}, = \frac{5}{-6}$

Ex : 14 $\lim_{x \to -2} \frac{5x^2+17x+14}{9x^2+5x-26}$

$= \frac{5(-2)^2+17(-2)+14}{9(-2)^2+5(-2)-26} = \frac{20-34+14}{36-10-26} = \frac{0}{0}$

$x \to -2$ માટે $x+2$ અવયવ પડશે

$= \lim_{x\to -2} \frac{5x^2+17x+14}{9x^2+5x-26}$, $= \frac{(x+2)(5x+7)}{(x+2)(9x-13),}$, $= \frac{5x+7}{9x-13}$,$= \frac{5(-2)+7}{9(-2)-13}$,$= \frac{-10+7}{-18-13}$, $= \frac{-3}{-31}$, $= \frac{3}{31}$

EX : 18 $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2+8x+12} = \frac{(-2)^3+8}{(-2)^2+8(-2)+12} = \frac{-8+8}{4-16+12} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2+8x+12}$,$= \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+6)}$, $= \frac{(x^2-2x+4)}{(x+6)}$,$= \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2)+6}$, $= \frac{4+4+4}{4}$, $= 3$

EX : 19 $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+5x^2+11x}{7x^2+2x} = \frac{x(x^2+5x+11)}{x(7x+2)} = \frac{x^2+5x+11}{7x+2}$

$= \frac{(0)^2+5(0)+11}{7(0)+2} = \frac{11}{2}$

Ex :20 $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8} = \frac{(2)^4-16}{(2)^3-8} = \frac{16-16}{8-8} = \frac{0}{0}$

$= \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{x^3-8}$, (x^2-4)નાબે અવયવ પાડતા $= \frac{(x^2+4)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$, $= \frac{(x^2+4)(x+2)}{(x^2+2x+4)}$

$= \frac{((2)^2+4)(2+2)}{((2)^2+2(2)+4)}$,$= \frac{(4+4)(2+2)}{(4+4+4)}$, $= \frac{8(4)}{12}$, $= \frac{32}{12}$,$= \frac{8}{3}$

EX : 22 $\lim_{x\to 0} 2 + \frac{5}{6+\frac{7}{x}}$, $= 2+\frac{5}{\frac{6x+7}{x}} = 2+\frac{5x}{6x+7} = \frac{12x+14+5x}{6x+7} = \frac{17x+14}{6x+7}$

Ex: 23 $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x}\left(\frac{2x+9}{x+3} - 3\right)\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2x+9-3x-9}{x+3}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{-x}{x+3}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-1}{x+3}\right) = \frac{-1}{0+3}$

$= \frac{-1}{3}$

EX : 24 $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3+7x^2+5x+6}{x^2+7x+6} = \frac{2(0)^3+7(0)^2+5(0)+6}{(0)^2+7(0)+6} = \frac{6}{6} = 1$

x^2+2x^2+2 | x^2+x+1

Ex: 25 $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x-4}{x^3-x^2-x-2}$

$$x-2\,\overline{)\,x^3-2x-4}$$
$$x^3-2x^2$$
$$-\quad +$$
$$2x^2-2x$$
$$2x^2-4x$$
$$-\quad +$$
$$2\,x-4$$
$$2\,x-4$$
$$-\quad +$$
$$0 \quad 0$$

$$x-2\,\overline{)\,x^3-x^3-x-2}$$
$$x^3-2x^2$$
$$-\quad +$$
$$x^2-x$$
$$x^2-2x$$
$$-\quad +$$
$$x-2$$
$$x-2$$
$$-\quad +$$
$$0 \quad 0$$

$= \frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x-2)(x^2+x+1)}$, $= \frac{(x^2+2x+2)}{(x^2+x+1)}$,

$= \frac{((2)^2+2(2)+2)}{((2)^2+2+1)}$, $= \frac{(4+4+2)}{(4+2+1)}$, $= \frac{10}{7}$

EX : 28 $\lim_{x \to 3} \left[\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x^2-3x}\right]$

$= \lim_{x \to 3} \left[\frac{1}{x-3} - \frac{3}{x(x-3)}\right]$ $= \lim_{x \to 3} \left[\frac{x-3}{x(x-3)}\right]$ $= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

Ex :29 $\lim_{x \to 0} \frac{a^{2x}+3a^x-4}{a^{2x}-4a^x+3}$ $= \frac{a^{2(0)}+3a^{(0)}-4}{a^{2(0)}-4a^{(0)}+3}$ $= \frac{1+3-4}{1-4+3}$ $= \frac{0}{0}$

$a^{2x} = (a^x)^2$ $\quad a^x = y$ $\quad x \to 0,\ y \to 1$

$\lim_{y \to 1} \frac{y^2+y-4}{y^2-4y+3}$, $= \lim_{y \to 1} \frac{(y-1)(y+4)}{(y-1)(y-3)}$, $= \lim_{y \to 1} \frac{(y+4)}{(y-3)}$,

$= \frac{(1+4)}{(1-3)}$, $= \frac{5}{-2}$

EX : 30 $\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ $= \frac{1-\sqrt{1-0}}{0}$ $= \frac{1-1}{0}$ $= \frac{0}{0}$

અંશ અને છેદને $1+\sqrt{1-x}$ વડે ગુણતાં

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} \times \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$ $= \lim_{x \to 0} \frac{1-(1-x)}{x(1+\sqrt{1-x})}$ $= \lim_{x \to 0} \frac{1-1+x}{x(1+\sqrt{1-x})}$ $= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+\sqrt{1-x})} \quad = \frac{1}{(1+\sqrt{1})} \quad = \frac{1}{(1+1)} \quad = \frac{1}{2}$

EX : 31 $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{x-3} = \frac{\sqrt{3+2}-\sqrt{5}}{3-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{3-3} = \frac{0}{0}$

અંશ અને છેદને $\sqrt{x+2}+\sqrt{5}$ વડે ગુણતાં

$= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}} = \lim_{x\to 3} \frac{x+2-5}{(x-3)\sqrt{x+2}+\sqrt{5}} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}$

$= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{3+2}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$

EX : 32 $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \lim_{x\to 4} \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x-4(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$

EX : 33 $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}}$

અંશ અને છેદને $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ વડે ગુણતાં

$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{1+x-1+x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}$

$= \frac{(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0})}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

EX : 34 $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2} \frac{(2)^3-8}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{8-8}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{0}{0}$

અંશ અને છેદને $\sqrt{x}+\sqrt{2}$ વડે ગુણતાં

$= \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{x-2} \quad = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)(\sqrt{x}+\sqrt{2})$

$= \quad ((2)^2+2(2)+4)(\sqrt{2}+\sqrt{2}) \quad = 12(2\sqrt{2}) = 24\sqrt{2}$

EX : 35 $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x+2x^2}-2}{x} \quad ,= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+0+2(0)^2}-2}{0} \;, \; = \frac{0}{0}$

અંશ અને છેદને $\frac{\sqrt{4+x+2x^2}+2}{x}$ વડે ગુણતાં

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x+2x^2}-2}{x} \times \frac{\sqrt{4+x+2x^2}+2}{\sqrt{4+x+2x^2}+2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{4+x+2x^2-4}{x(\sqrt{4+x+2x^2}+2)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x+2x^2}{x(\sqrt{4+x+2x^2}+2)}, \quad = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+2x)}{x(\sqrt{4+x+2x^2}+2)}, \quad = \lim_{x\to 0} \frac{1+2x}{(\sqrt{4+x+2x^2}+2)},$

$= \frac{1+2(0)}{(\sqrt{4+0+2(0)^2}+2)}, = \frac{1}{(\sqrt{4}+2)}, = \frac{1}{(2+2)}, \; = \frac{1}{4}$

EX : 36 $\quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2} \times \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{x+7-9}{x+2-4} \times \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+7}+3} \quad = \lim_{x\to 2} \frac{x-2(\sqrt{x+2}+2)}{x-2(\sqrt{x+7}+3)}$

$= \frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+7}+3)} \quad = \frac{(\sqrt{2+2}+2)}{(\sqrt{2+7}+3)} = \frac{(\sqrt{4}+2)}{(\sqrt{9}+3)} \quad = \frac{(2+2)}{(3+3)} \quad = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

EX : 37 $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}, \quad = \frac{-3+3}{\sqrt{-3+4}-1}, \quad = \frac{-3+3}{\sqrt{1}-1}, \; = \frac{-3+3}{1-1} \;, \quad = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x+4}-1} \times \frac{\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{x+4}+1} \;,$

$= \lim_{x\to -3} \frac{x+3(\sqrt{x+4}+1)}{x+4-1}$

$= \lim_{x\to -3} \frac{x+3(\sqrt{x+4}+1)}{x+4-1}, = \lim_{x\to -3} \frac{x+3(\sqrt{x+4}+1)}{x+3}, \; = \lim_{x\to -3} \sqrt{x+4}+1,$

$= \sqrt{-3+4}+1, = \sqrt{1}+1, = 2$

EX : 39 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}$

$= \lim_{x\to 3}\frac{x+6-9(2+\sqrt{x+1})}{4-x-1(\sqrt{x+6}+3)}$, $= \lim_{x\to 3}\frac{x-3(2+\sqrt{x+1})}{-x+3(\sqrt{x+6}+3)}$, $= \lim_{x\to 3}\frac{x-3(2+\sqrt{x+1})}{-(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$,

$= \lim_{x\to 3}\frac{(2+\sqrt{x+1})}{-(\sqrt{x+6}+3)}$, $= \frac{(2+\sqrt{3+1})}{-(\sqrt{3+6}+3)}$, $= \frac{(2+\sqrt{4})}{-(\sqrt{9}+3)}$,$= \frac{(2+2)}{-(3+3)}$ $= \frac{4}{-6}$, $= \frac{2}{-3}$

EX : 41 જો $f(x) = x^2$ હોય તો

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+4)-f(x-4)}{x}$ શોધો.

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+8x+16-(x^2-8x+16)}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+8x+16-x^2+8x-16}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{16x}{x} = 16$

$f(x) = x^2$

$= f(x+4) = (x+4)^2$

$= x^2+8x+16$

$= f(x-4) = (x-4)^2$

$= x^2-8x+16$

EX : 42 જો $f(x) = x^2+5$ હોય તો

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ ની કિંમત શોધો.

$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h+14-(14)}{h}$

$\lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h}$

$\lim_{h\to 0}\frac{h(h+6)}{h}$

$= h+6$

$=0+6$

$= 6$

$f(x) = x^2+5$

$f(3+h) = (3+h)^2+5$

$= 9+6h+h^2+5$

$= h^2+6h+14$

$f(3) = (3)^2+5$

$= 9+5$

$= 14$

EX : 44 જો $f(x) = \sqrt{x+2}$ હોય તો

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}$ ની કિંમત શોધો.

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \quad = \lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{x-2(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2(\sqrt{x+2}+2)} \quad = \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2+2}+2)} = \frac{1}{(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$$

EX : 45 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots\ldots+n}{(n+3)(n+4)} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+4n+3n+12}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2+7n+12} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2(n^2+7n+12)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+14n+24} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(2+\frac{14}{n}+\frac{24}{n^2})}$$

હવે $n\to\infty$ ત્યારે $\frac{1}{n},\frac{14}{n},\frac{24}{n^2}\to 0 \quad = \frac{1+0}{2+0+0} \quad = \frac{1}{2}$

Ex : 46 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{(x^2+2)(x+3)} \quad = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3+3x^2+2x+6}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^3\,(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3})}$ હવે $x\to\infty$ ત્યારે $\frac{1}{x^3},\frac{3}{x},\frac{2}{x^2},\frac{6}{x^3}\to 0$

$$= \frac{(1+0)}{(1+0)} \quad = 1$$

Ex : 47 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+7}{2x^2+3x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2})}{x^2(2+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2})} \quad = \frac{(3+0+0)}{(2+0-0)} = \frac{3}{2}$

EX : 48 $\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x)(2+x)(3+x)}{1+x^3} \quad = \lim_{x\to\infty}\frac{(2+x-2x-x^2)(3+x)}{1+x^3}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(2-x-x^2)(3+x)}{1+x^3} \quad = \lim_{x\to\infty}\frac{6+2x-3x-x^2-3x^2-x^3}{1+x^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{6-x-4x^2-x^3}{1+x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\,(\frac{6}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}-1)}{x^3\,(\frac{1}{x^3}+1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

EX : 49 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \quad = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-1)}{x^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}+1)} \quad = \frac{(0-1)}{(0+1)} \quad = -1$$

EX :52 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3} \quad = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+2n^2+n}{6n^3} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

EX : 53 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum n}{\sqrt{n^4-1}} \quad = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\sqrt{n^4-1}} \quad = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-n}{2}}{n^2-1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2(n^2-1)} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2-2} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\frac{1}{n})}{n^2(2-\frac{2}{n^2})} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

EX : 54 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots\ldots+n^3}{(n^3+7)(2n+5)} \quad = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{2n^4+5n^3+14n+35}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4(2n^4+5n^3+14n+35)} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n^3+n^2}{8n^4+20n^3+56n+140)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^4(8+\frac{20}{n}+\frac{56}{n^3}+\frac{140}{n^3})} \quad = \frac{1+0+0}{8+0+0+0} \quad \frac{1}{8}$$

EX : 55 $\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right] \quad = \lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)(x-1)}\right]$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)-1}{(x-2)(x-1)} \quad = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-1)} \quad = \frac{1}{(x-1)} \quad = \frac{1}{(2-1)} \quad = \frac{1}{1} \quad = 1$$

EX : 56 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^5-1024}{x-4} \qquad \lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x\to a} = \text{n}.a^{n-1}$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{x^5-(4)^5}{x-4} \quad = 5.\,(4)^{5-1} \quad = 5.\,(4)^4 \quad = 5.256 = 1280$$

EX : 58 $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^5-243}{x^3-27}$ $= \lim\limits_{x\to 3} \frac{\frac{x^5-243}{x-3}}{\frac{x^3-27}{x-3}}$

$= \frac{5.(3)^{5-1}}{3.(3)^{3-1}}$ $= \frac{5.(3)^4}{3.(3)^2}$ $= \frac{5.(81)}{3.(9)}$ $= \frac{405}{27}$ $= 15$

EX : 60 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{2x}+2^{3x}-2}{x}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{2x}-1+2^{3x}-1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ = log a

$= \lim\limits_{x\to 0} \left\{\frac{3^{2x}-1}{x} + \frac{2^{3x}-1}{x}\right\}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2(3^{2x}-1)}{2x} + \lim\limits_{x\to 0} \frac{3(2^{3x}-1)}{3x}$

$= 2.\lim\limits_{x\to 0} \frac{(3^{2x}-1)}{2x} + 3.\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2^{3x}-1)}{3x}$ = 2. Log3 +3.log 2

$= \log(3)^2 + \log(2)^3$ = log (9×8) = log 72

Ex: 61 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{3x}-2^x}{x}$, $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{3x}-1-2^x+1}{x}$, $= \lim\limits_{x\to 0} \left\{\frac{2^{3x}-1}{x} - \frac{2^x+1}{x}\right\}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{3(2^{3x}-1)}{3x} - \frac{1(2^x-1)}{1x}$

$= 3 \lim\limits_{x\to 0} \frac{(2^{3x}-1)}{3x} - 1.\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2^x-1)}{1x}$,

= 3. log 2 – 1. log 2, = log 2^3 – log 2^1, = log $\frac{8}{2}$, log = 4

Ex : 62 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{5x}+a^{2x}-2}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^{5x}-1+a^{2x}-1}{x}$, $= \lim\limits_{x\to 0} \left\{\frac{a^{5x}-1}{x} + \frac{a^{2x}-1}{x}\right\}$

= = $\lim\limits_{x\to 0} [\frac{a^{5x}-1}{x} + \frac{a^{2x}-1}{x}]$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{5(a^{5x}-1)}{5x} + \frac{2(a^{2x}-1)}{2x}$,

$= 5.\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a^{5x}-1)}{5x} + 2.\lim\limits_{x\to 0} \frac{2(a^{2x}-1)}{2x}$ $=(\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a^x-1)}{x}$ = log a)

$= 5.\log a + 2.\log a$, $= 7.\log a$

EX : 63 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1-e^{2x}+1}{x}$, $= \lim_{x\to 0} \left\{\frac{e^{3x}-1}{x} - \frac{e^{2x}+1}{x}\right\}$

$= = \lim_{x\to 0} \frac{3(e^{3x}-1)}{3x}$ - $\frac{2(e^{2x}-1)}{2x}$

$= 3.\lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x}-1)}{3x} - 2\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)}{2x}$, $(\lim_{x\to 0} \frac{(a^{x}-1)}{x} = \log a)$

$=3.\log e - 2.\log e = 3-2$, $= 1$ $(\log e = 1)$

Ex :64 સાબિત કરો કે $\lim_{x\to a} \frac{a^{x}-b^{x}}{x} = \log\left(\frac{a}{b}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1-b^{x}+1}{x}$, $= = \lim_{x\to 0} \left\{\frac{a^{x}-1}{x} - \frac{b^{x}-1}{x}\right\}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1(a^{x}-1)}{1x}$ - $\lim_{x\to 0} \frac{1(b^{x}-1)}{1x}$

$= 1.\lim_{x\to 0} \frac{(a^{x}-1)}{x} - 1.\lim_{x\to 0} \frac{(a^{x}-1)}{x}$,

$= \log a - \log b$, $= \log(\frac{a}{b})$

સાતત્ય

સાતત્યની વ્યાખ્યા

કોઈ પણ વિધેય $f(x)$, $x = a$ આગળ સતત થવા માટે નીચેની શરતો જરૂરી છે.

(1) તે વિધેયની $x = a$ આગળ પરિમિત કિંમત હોવી જોઈએ.

(2) જ્યારે $x \to a$ હોય ત્યારે તે વિધેયનું લક્ષ મળવું જોઈએ.

(3) લક્ષ અને કિંમત બંને સરખાં હોવા જોઈએ.

ટૂંકમાં $f(a)$ ની પરિમિત કિંમત હોવી જોઈએ અને

$\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, અને $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ નું અસ્તિત્વ હોવું જોઈએ,

તેમજ

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ મળવું જોઈએ.

જો આ શરતો પૈકી કોઈ પણ શરતનો ભંગ થાય તો વિધેય $f(x)$, $x = a$ આગળ અસતત છે એમ કહેવાય

EX : 2 વિધેય $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ બિંદુ $x = 2$ આગળ સતત છે કે કેમ તે ચકાસો.

$f(2) = 3(2)^2 + 2(2) - 1$ = 3(4) +4-1 = 12+4-1 = 15

EX : 3 વિધેય $f(x) = \frac{1}{x}$ નું $x = 0$ આગળ સાતત્ય તપાસો.

$f(0) = \frac{1}{0}$ અહીં વિધેયમાં છેદમાં શૂન્ય હોવાથી અસતત કહેવાય.

EX : 5 વિધેય $f(x)$ નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત હોય તો $x = 2$ આગળ તે સતત છે એમ કહી શકાય ?

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, $x < 2$

$= 4$ $x = 2$

$= x + 2$ $x > 2$

$f(x) = 4$ $\lim\limits_{x \to 2} - f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $\lim\limits_{x \to 2} + f(x) = x + 2$

$f(2) = 4$ $\quad f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$ $\quad f(x) = x + 2$

$f(x) = (x+2),$ $\quad f(2) = 2 + 2$

$f(2) = (2+2),$ $\quad = 4$

$= 4$ સતત છે .

EX : 6 $x = 2$ આગળ નીચેના વિધેયનું સાતત્ય ચકાસો.

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2},$ $\quad x < 2$

$= 2$ $\quad x \geq 2$

$f(x) = 2$ $\quad \lim_{x \to 2} - f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad \lim_{x \to 2} + f(x) = 2$

$f(2) = 2$ $\quad f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$ $\quad f(2) = 2$

$f(x) = (x+2),$

$f(2) = (2+2),$

$= 4$ અસતત છે.

EX : 7 $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ $\quad x \neq 4$

$f(x) = 8$ $\quad x = 4$

હોય તો $x = 4$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

$f(x) = 8$ $\quad \lim_{x \to 4} - f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ $\quad \lim_{x \to 2} + f(x) = x + 4$

$f(4) = 8$ $\quad f(x) = x + 4$

$f(x) = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4}$ $\quad f(4) = (4+4)$

$f(x) = (x+4)$ $\quad = 8$

$f(4) = (4+4),$ $\quad$ સતત છે.

$= 8$

EX : 8 જો $f(x) = \frac{2x^2+x}{x}$ $\quad x \neq 0$

$= 1$ $\quad x = 0$

હોય તો X = 0 આગળ વિધેય સતત છે એમ સાબિત કરો

$f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0} - f(x) = \frac{2x^2+x}{x}$ $\lim_{x\to 0} + f(x) = \frac{2x^2+x}{x}$

$f(0) = 1$ $f(x) = \frac{x(2x+1)}{x}$ $f(x) = \frac{x(2x+1)}{x}$

$f(x) =$ 2X+ 1 $f(x) =$ 2X+ 1

$f(0) =$ 2(0)+ 1 $f(x) =$ 2(0)+ 1

= 1 = 1

સતત છે.

EX : 9 વિધેય $f(x)$ નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે.

$f(x) = x^2$ 0$\le x < 1$

$f(x) = x$ 1$\le x < 2$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 2$\le x < 3$

સાબિત કરો કે વિધેય $f(x)$, $x = 1$, અને $x = 2$ બંને બિંદુઓ આગળ સતત છે.

$f(x) = x$ $\lim_{x\to 1} - f(x) = x^2$ $\lim_{x\to 0} + f(x) = x$

$f(1) = 1$ $f(x) = x^2$ $f(x) = x$

$f(1) = (1)^2$ $f(1) = 1$

સતત છે = 1 =1

Ex : 10 વિધેય $f(x)$, નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત હોય તો $x = a$ આગળ તેનું સાતત્ય તપાસો.

$f(x) = \frac{x^2}{a} - a$ 0$< x < a$

$f(x) =$ 0 $x = a$

$f(x) = a - \frac{x^3}{a^2}$ $x > a$

$f(x) =$ 0 $\lim_{x\to a} - f(x) = \frac{x^2}{a} - a$ $\lim_{x\to a} + f(x) = a - \frac{x^3}{a^2}$

$f(a) =$ 0 $f(x) = \frac{x^2-a^2}{a}$ $f(x) = \frac{a^3-x^3}{a^2}$

= 0 $f(a) = \frac{(a)^2-a^2}{a}$ $f(a) = \frac{a^3-(a)^3}{a^2}$

= 0 = 0

EX : 12 $x = 1$ આગળ નીચેના વિધેયનું સાતત્ય ચકાસો.

$f(x) = 2x \qquad 0 \le x < 1$

$f(x) = 3 \qquad x = 1$

$f(x) = 4 - x \qquad 1 < x \le 2$

$f(x) = 3$ $\qquad \lim_{x \to 1} - f(x) = 2x$ $\qquad \lim_{x \to 1} + f(x) = 4 - x$

$f(1) = 3$ $\qquad f(x) = 2x$ $\qquad f(x) = 4 - x$

= 3 $\qquad f(1) = 2(1)$ $\qquad f(1) = 4 - 1$

= 2 $\qquad$ = 3

EX : 14 જો $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \qquad x \ne 4$

$f(x) = \frac{1}{4} \qquad x = 4$

$f(x)$ નું $x = 4$ આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

$f(x) = \frac{1}{4}$ $\qquad \lim_{x \to 4} - f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ $\qquad \lim_{x \to 4} + f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$f(4) = \frac{1}{4}$ $\qquad f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$ $\qquad f(x) = \frac{x-4}{(x-4)\sqrt{x}+2}$

$f(x) = \frac{x-4}{(x-4)\sqrt{x}+2}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ $\qquad f(4) = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

$f(4) = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

EX : 20 જો $f(x) = \frac{8x^2-x+3}{x^2-7x+10}$ હોય તો x ની કઈ કિંમત માટે વિધેય અસતત બને

વિધેયના છેદની કિંમત શૂન્ય હોય ત્યારે વિધેય વ્યાખ્યાયિત થાય નહીં.

$\frac{8x^2-x+3}{(x-5)(x-2)}$ છેદના વિધેયને શૂન્ય સાથે સરખાવતા

$(x-5)(x-2)$ = 0 થાય ત્યારે અસતત બને એટલે કે $x = 5$ અથવા $x = 2$

તેથી $x = 5$ અને $x = 2$ આગળ વિધેય અસતત થાય.

EX : 21 જો $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$ $x \neq 1$

$f(x) = K + 2$ $x = 1$

તો K ની કઈ કિંમત માટે વિધેય $x = 1$ આગળ સતત થાય?

$f(x) = K + 2$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$

$f(1) = K + 2$

$f(x) = \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}$

$f(x) = (2x+1)$ $= f(1) = (2(1)+1)$ = 3

$\lim_{x\to 1^+} f(1) = 3$

વિધેયની કિંમત અને લક્ષની કિંમત સરખી થાય ત્યારે વિધેય સતત બને છે.

$K + 2$ = 3, K = 3 – 2 , K = 1

EX : 22 જો $f(x) = \frac{x^2-x-12}{x-4}$ $x \neq 4$

$f(x) = 2k - 3$ x = 4

$f(x) = 2K - 3$ $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \frac{x^2-x-12}{x-4}$

$f(4) = 2K - 3$

$f(x) = \frac{(x-4)(x+3)}{x-4}$

$f(4) = (x+3)$ $= f(1) = (4+3)$ = 7

$\lim_{x\to 4^+} f(4) = 7$

$2K - 3$ = 7

$2K$ = 7+3, $2K$ = 10, K = 5

EX : 24 (b) સાબિત કરો કે નીચેનું વિધેય $x = \frac{1}{2}$ આગળ અસતત છે.

જો $f(x) = x$ $0 \leq \mathrm{x} < \frac{1}{2}$

$f(x) = 1$ $\mathrm{x} = \frac{1}{2}$

$f(x) = 1 - x \qquad \frac{1}{2} < x < 1$

$f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}} - f(x) = x \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}} + f(x) = 1 - x$

$f(\frac{1}{2}) = 1 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

EX: 31 (B) x ની કઈ કિંમત માટે $f(x)$ અસતત છે.

$f(x) = \frac{5x^2-7x+9}{x^2+3x-10}$ = (x+5)(x-2) = 0

EX : 32 (c) x = 1 આગળ $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+6}$ .... થાય.

$f(1) = \frac{(1)^2-4(1)+3}{(1)^2-7(1)+6}$ = $\frac{1-4+3}{1-7+6}$ = $\frac{0}{0}$ અસતત

EX : 33 (a) વિધેય $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ x =2 આગળ સાતત્ય ચર્ચો.

$f(x) = \frac{(2)^2-5(2)+6}{(2)^2-3(2)+2}$ = $\frac{4-10+6}{4-6+2}$ = $\frac{0}{0}$