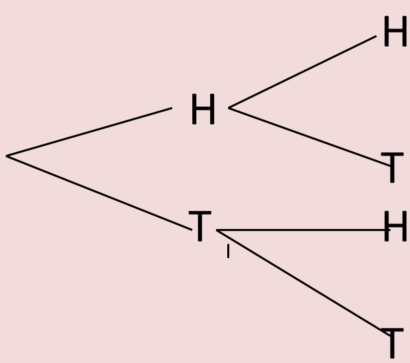
યુનિટ નં -3 ગણિતીય અપેક્ષા

સંભાવના વિતરણ – ચલ x ની જુદી જુદી કિંમતો અને તેમની સંભાવના દર્શાવતા કોષ્ટકને સંભાવના વિતરણ કહે છે. અહીં કુલ સંભાવના 1ની x ની જુદી જુદી કિંમતો માટે વહેંચણી થયેલી છે.

બે સિક્કા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે તો નીચેના પરિણામ મળે છે.



$$[HH, HT, TH, TT]$$

છાપની સંખ્યા ચલ x_i	0	1	2	કુલ
સંભાવના$P(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

અહીં જરૂરી શરત છે કે $P(x_i) \geq 0$ એટલે કે દરેક સંભાવના અનૃણ હોય છે. $\sum P(x_i) = 1$ એટલે કે કુલ સંભવના એક થાય છે.

તો વિધેય $P(x)$ ને યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય કહે છે.

$P(x_i)$ ની બધી જ કિંમતોને યદચ્છ x ચલ નું સંભાવના વિતરણ કહે છે.

અસતત ચલની ગણિતીય અપેક્ષા – યદચ્છ અસતત ચલ xની અપેક્ષિત કિંમત એટલે યદચ્છ ચલની સરેરાશ કિંમત. જો કોઈ એક યદચ્છ અસતત ચલ x ની જુદી જુદી કિંમતો $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots X_n$ સાથે સંભાવના અનુક્રમે $P(x_1), P(x_2)\ P(x_3) \ldots\ldots P(x_n)$ સંકળાયેલી હોય તો ચલ xની અપેક્ષિત કિંમતની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

$$E(x) = x_1.p(x_1) + x_2.p(x_2) + x_3.p(x_3) + \ldots\ldots x_n.p(x_n)$$
$$= \sum x_i.p(x_i)$$

xની અપેક્ષિત કિંમત એટલે xનો મધ્યક અને તેને μ વડે દર્શાવી શકાય.

$$E(x) = \mu$$

અપેક્ષિત કિંમતોના ગુણધર્મો

(1) અચલ સંખ્યાની અપેક્ષિત કિંમત તે જ અચલ સંખ્યા થાય એટલે કે $E(k) = k$ $E(5) = 5$

(2) જો k અચલ હોય તો $E(kx) = k.E(x)$, $E(4x) = 4.E(x)$.

(3) $E(ax + b) = a.E(x) + b$, $E(2x + 3) = 2.E(x) + 3$.

(4) જો x અને y બે યદચ્છ ચલ હોય તો $E(x + y) = E(x) + E(y)$

(5) જો x અને y બે સ્વતંત્ર ચલ હોય તો $E(x \times y) = E(x) \times E(y)$

(6) $E(x - \mu) = E(x) - E(\mu)$

$= \mu = \mu$

$= 0$

(7) જો g(x) , x નું વિધેય હોય તો

$E(g(x)) = \sum g(x).p(x)$

વિચરણ = $E(x^2) - [E(x)]^2$

વિચરણના કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામ

(1) $V(x+a) = V(x)$, $V(x+3) = V(x)$

(2) $V(ax+b) = a^2 V(x)$, $V(5x+2) = 5^2 V(x)$

(3) $V(ax+by) = a^2 V(x) + b^2 V(y)$, $V(2x+4y) = 2^2 V(x) + 4^2 V(y)$

(4) $V(ax-by) = a^2 V(x) + b^2 V(y)$, $V(3x-7y) = 3^2 V(x) + 7^2 V(y)$

Ex : 4 એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

X_i	-2	-1	0	1	2
$P(x_i)$	0.15	0.30	0.30	0.15	0.10

તો નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $E(x)$ (2) $E(3x+1)$ (3) $E(x^2)$

(4) $E(x+1)^2$ (5) $V(x)$ (6) $V(2x+3)$

X_i	$P(x_i)$	$X_i \, .P(x_i)$	$X_i^2 . P(x_i)$
-2	0.15	-0.3	0.6
-1	0.30	-0.3	0.3
0	0.30	0	0
1	0.15	0.15	0.15
2	0.10	0.2	0.4
કુલ	1	-0.25	1.45

(1) $E(x) = \sum x_i.p(x_i)$

$= -0.25$

(2) $E(3x + 1) = 3E(x) + 1$

$= 3(-0.25) + 1$

$= -0.75 + 1$

$= 0.25$

(3) $E(x^2) = \sum x_i^2.p(x_i)$

$= 1.45$

(4) $E(x+1)^2 = E(x^2 + 2x + 1)$

$= E(x^2) + 2.E(x) + 1$

$= 1.45 + 2(-0.25) + 1$

$= 1.45 - 0.50 + 1$

$= 1.95$

(5) $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 1.45 - (-0.25)^2$

$= 1.45 - 0.0625$

$= 1.3875$

(6) $V(2x + 3) = 2^2 .V(x)$

$= 4 \times 1.3875$

$= 5.55$

Ex : 5 એક યદચ્છ ચલ x માટે $E(x) = 2$ છે. તો નીચેનાની કિંમત શોધો.

(1) $E(3x)$

$= 3E(x)$

$= 3(2)$

$= 6$

(2) $E(x+5)$

$= E(x) + 5$

$= 2+5$

$= 7$

(3) $E(2x+3)$

$= 2E(x) + 3$

$= 2(2) + 3$

$= 4+3$ $= 7$

Ex : 6 એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x_i)$	0.05	0.10	0.30	0.20	0.05	0.10	0.05	0.10	0.05

X નો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

X_i	$P(x_i)$	$X_i \cdot P(x_i)$	$X_i^2 \cdot P(x_i)$
2	0.05	0.1	0.2
3	0.10	0.3	0.9
4	0.30	1.2	4.8
5	0.20	1	5
6	0.05	0.3	1.8
7	0.10	0.7	4.9
8	0.05	0.4	3.2
9	0.10	0.9	8.1
10	0.05	0.5	5
કુલ	1	5.4	33.9

મધ્યક $E(X) = \sum X_i . Px_i$

$= 5.4$

વિચરણ $V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 33.9 - (5.4)^2$

$= 33.9 - 29.16$

વિચરણ $= 4.74$

પ્ર.વિ $= 2.18$

Ex : 7 એક ચલનું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

X_i	15	16	17	18	19	20
$P(x_i)$	0.04	0.19	3P	0.26	P	0.07

તો Pની કિંમત મેળવી Xની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

$\sum PX_i = 1$

$0.04+0.19+3P+0.26+P+0.07 = 1$

$0.56 + 4P = 1$

$4P = 1-0.56$

$4P = 0.44$

$P = \frac{0.44}{4}$

$P = 0.11$

X_i	$P(x_i)$	$X_i\ .P(x_i)$
15	0.04	0.6
16	0.19	3.04
17	0.33	5.61
18	0.26	4.68
19	0.11	2.09
20	0.07	1.4
	1	17.42

$E(x) = \sum X_i.Px_i$

$= 17.42$

Ex : 8 એક ચલનું સંભાવના વિતરણ નીચે પ્રમાણે છે.

X_i	-1	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	P	P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Pની કિંમત શોધી X નો મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

X_i	$P(x_i)$	$X_i\ .P(x_i)$	$X_i^2.\ P(x_i)$
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{3}$	0	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{16}{12}$
	1		

$\sum PX_i = 1$

$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + P + P + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 1$

$\frac{2+4+12P+12P+1+1}{12} = 1$

$8+24P = 12$

$24P = 12- 8$

$24P = 4$

$P = \frac{4}{24}$, $P = \frac{1}{6}$

$E(X) = \sum X_i.Px_i$

$= \frac{-1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12}$

$= \frac{-2+2+4+3+4}{12} = \frac{11}{12}$

$E(x^2) = \sum X_i^2.\ P(x_i)$

$= \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{12} + \frac{16}{12}$

$= \frac{2+2+8+9+16}{12} = \frac{37}{12}$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= \frac{37}{12} - (\frac{11}{12})^2$

$= \frac{37}{12} - \frac{121}{144} = \frac{444-121}{144} = \frac{323}{144}$

Ex : 11 એક વસ્તુની જુદા જુદા દિવસો માટે માંગ નીચે પ્રમાણે છે

માંગ	20	21	22	23	24
દિવસો	10	20	20	40	10

તો અપેક્ષિત માંગ શોધો.

X_i	PX_i
20	0.1
21	0.2
22	0.2
23	0.4
24	0.1

Ex : 9 એક ડબ્બામાં 5 સફેદ અને 3 કાળા દડા છે. તેમાંથી યદચ્છ રીતે 3 દડા લેવામાં આવે છે. તો કાળા દડાની અપેક્ષિત સંખ્યા શોધો.

5 સફેદ અને 3 કાળા દડા કુલ 8 દડા છે તેમાંથી 3 દડા લેવાના છે.

એટલે કે $^8C_3$ થાય

કાળા દડાની સંખ્યા Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
0	$\frac{^3C_0 \times {^5C_3}}{^8C_3} = \frac{1\times10}{56} = \frac{10}{56}$	0
1	$\frac{^3C_1 \times {^5C_2}}{^8C_3} = \frac{3\times10}{56} = \frac{30}{56}$	$\frac{30}{56}$
2	$\frac{^3C_2 \times {^5C_1}}{^8C_3} = \frac{3\times5}{56} = \frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$
3	$\frac{^3C_3 \times {^5C_0}}{^8C_3} = \frac{1\times1}{56} = \frac{1}{56}$	$\frac{3}{56}$
કુલ	1	$\frac{63}{56}$

$E(X) = \sum X_i.Px_i \quad = \frac{63}{56} = \frac{9}{8}$

Ex :13 એક લોટરીમાં પ્રત્યેક ₹ 1ની 100 ટિકિટો વેચાઈ છે. અને એક ઈનામ ₹ 80 છે. એક વ્યક્તિ પાસે એક ટિકિટ છે તો તેને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

	મળતી રકમ Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
ઈનામ મળે ત્યારે	79	0.01	0.79
ઈનામ ન મળે ત્યારે	-1	0.99	-0.99
કુલ		1	-0.20

$E(X) = \sum X_i.Px_i \quad = \quad -0.20$

Ex : 14 100 રૂપિયાવાળી લોટરીની એક ટિકિટમાં ₹1,00,000 મળવાની સંભાવના0.00001 છે. ₹ 50,000 મળવાની સંભાવના 0.0001 છે, જ્યારે ₹ 10 મળવાની સંભાવના 0.4 છે. તો મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

	મળતી રકમ Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
ઈનામ મળે ત્યારે	99,900	0.00001	0.999
	49,900	0.0001	4.99
	-90	0.4	-36
ઈનામ ન મળે ત્યારે	-100	0.59989	-59.989

$E(X) = \sum X_i.Px_i$

$= 0.999+4.99-36-59.989$

$= 5.989-95.989$

$= -90$

Ex : 15 એક વ્યકિત 1000 ₹ નો વીમા ઉતરાવે છે, જેનું પ્રીમિયમ ₹ 20 ભરવું પડે છે. જો તેની ઉંમર જૂથમાં વ્યક્તિનું મરણ થાય તેની સંભાવના 0.01 હોય તો વીમાકંપનીને મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

	વીમા કંપનીને મળતી રકમ Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
મૃત્યુ થાય ત્યારે	-980	0.01	-9.8
મૃત્યુ ન થાય ત્યારે	20	0.99	19.8
કુલ		1	10

$E(X) = \sum X_i.Px_i = 10$₹

EX : 16 એક ડબ્બામાં 5 ટિકિટો છે, જેના ઉપર અનુક્રમે 1,1,2,2,2 નંબરો લખેલા છે. યદચ્છ રીતે બે ટિકિટ લેવામાં આવે છે તો મળતા નંબરોના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

ટિકિટ પરના નંબર 1,1,2,2,2 છે કુલ 5 ટિકિટમાંથી 2 ટિકિટ લેવામાં આવે તો પસંદગી $^5C_2$, અહીં 1 નંબરવાળી ટિકિટની સંખ્યા 2 છે અને 2 નંબરવાળી ટિકિટની સંખ્યા 3 છે.

મળતા નંબર	સરવાળા Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
1,1	2	$\frac{{}^2C_2 \times {}^3C_0}{{}^5C_2} = \frac{1\times1}{10} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
1,2	3	$\frac{{}^2C_1 \times {}^3C_1}{{}^5C_2} = \frac{2\times3}{10} = \frac{6}{10}$	$\frac{18}{10}$
2,2	4	$\frac{{}^2C_0 \times {}^3C_2}{{}^5C_2} = \frac{1\times3}{10} = \frac{3}{10}$	$\frac{12}{10}$

$E(X) = \sum X_i.Px_i \quad = \frac{32}{10}$

EX : 17 1 થી 5 નંબરોવાળી ટિકિટોમાંથી યદચ્છ રીતે બે ટિકિટો લેવામા આવે છે. તો મળતા નંબરના સરવાળાની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

કુલ 5 માથી 2 ટિકિટ લેવાની છે. તો ${}^5C_2$ થશે 1,2,3,4,5,6 નંબર લખેલી ટિકિટો છે.

મળતા નંબર	સરવાળા Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
1,2	3	$\frac{{}^{1}C_1 \times {}^{1}C_1}{{}^{5}C_2} = \frac{1\times1}{10} = \frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1,3	4	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
1,4	5	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$
1,5	6	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
2,3	5	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$
2,4	6	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
2,5	7	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
3,4	7	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$
3,5	8	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$
4,5	9	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

$E(X) = \sum X_i.Px_i = \frac{60}{10} = 6$

Ex : 19 બે સિક્કા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. પ્રત્યેક છાપ માટે ₹8 મળે છે, જ્યારે પ્રત્યેક કાંટા માટે ₹ 10 ગુમાવવા પડે છે તો મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

છાપની સંખ્યા	મળતી રકમ Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
0	-20	$\frac{1}{4}$	$\frac{-20}{4}$
1	-2	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{4}$
2	16	$\frac{1}{4}$	$\frac{16}{4}$
કુલ		1	$\frac{-8}{4}$

$E(X) = \sum X_i.Px_i \quad = \frac{-8}{4} \quad = -2$

Ex : 20 એક ડબ્બામાં 4 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે.તેમાંથી યદચ્છ રીતે 2 દડા લેવામાં આવે છે. પ્રત્યેક સફેદ દડા માટે ₹ 4 મળે છે ,જ્યારે પ્રત્યેક કાળા દડા માટે ₹ 2 ચૂકવવા પડે છે તો મળતી રકમની અપેક્ષિત કિંમત શોધો.

કાળા દડાની સંખ્યા	મળતી રકમ Xi	સંભાવના Pxi	Xi.Pxi
0	8	$\frac{{}^4C_0 \times {}^2C_2}{{}^6C_2} = \frac{1\times1}{15} = \frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$
1	2	$\frac{{}^4C_1 \times {}^2C_1}{{}^6C_2} = \frac{4\times2}{15} = \frac{8}{15}$	$\frac{16}{15}$
2	-4	$\frac{{}^4C_2 \times {}^2C_0}{{}^6C_2} = \frac{6\times1}{15} = \frac{6}{15}$	$\frac{-24}{15}$
કુલ		1	

$E(X) = \sum X_i . Px_i \quad = \frac{-24+24}{15} \quad = 0$

Ex : 21 એક ડબ્બામાં 3 કાળા અને 2 સફેદ દડા છે. તેમાંથી 2 દડા યદચ્છ રીતે લેવામાં આવે છે.પ્રત્યેક કાળા દડા દીઠ ₹ 24 મળતા હોય અને જો રમત સમતોલ રાખવી હોય તો પ્રત્યેક સફેદ દડા દીઠ કેટલા રૂપિયા ચૂકવવા જોઈએ?

Ex : 22 યદચ્છ ચલ X નું સંભાવના વિધેય નીચે છે.તો અચલાંક K ની કિંમત મેળવો અને આ વિતરણ માટેના મધ્યક અને વિચરણ પણ મેળવો.

$P(x) = K(X+2)$ જ્યાં $X = -2,-1,0,1,2$

$= 0$ અહીં P(x) ના વિધેય માં X ની કિંમત મૂકતાં

$P(x) = K(X+2)$	$P(x) = K(X+2)$	$P(x) = K(X+2)$
$P(-2) = K(-2+2)$	$P(-1) = K(-1+2)$	$P(0) = K(0+2)$
$= 0$	$= K$	$= 2K$

$P(x) = K(X+2)$	$P(x) = K(X+2)$
$P(1) = K(1+2)$	$P(2) = K(2+2)$
$= 3K$	$= 4K$

X_i	$P(x_i)$	$X_i \cdot P(x_i)$	$X_i^2 \cdot P(x_i)$
-2	0	0	0
-1	$K(\frac{1}{10}) = \frac{1}{10}$	$\frac{-1}{10}$	$\frac{1}{10}$
0	$2K = \frac{2}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{0}{10}$
1	$3K = \frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$4K = \frac{4}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{16}{10}$
	1	$\frac{10}{10}$	$\frac{20}{10}$

$\sum Pxi = 1$

$0+K+2K+3K+4K = 1$

$10K = 1$

$K = \frac{1}{10}$

$E(X) = \sum Xi.Pxi$

$= \frac{10}{10}$

$= 1$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 2 - (1)^2$

$= 2-1 = 1$

Ex : 24 જો $E(x) = 2$, $V(x) = 1$ હોય તો $E(X+1)^2$ અને $V(5x+3)$ ની કિંમત મેળવો.

$E(X+1)^2 = E(x^2+2x+1)$
$= E(x^2) + 2E(x) + 1$
$= 5 + 2(2) + 1$
$= 10$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$
$1 = E(x^2) - (2)^2$
$1 = E(x^2) - 4$
$5 = E(x^2)$

$V(5x+3) = 5^2 V(x)$
$= 25(1)$
$= 25$

Ex : 25 X અને Y બે નિરપેક્ષ ચલો છે અને આપેલું છે કે $E(x) = 2.8$, $E(y) = 5.3$, $V(x) = 18.6$, $V(y) = 41.3$ તો નીચેનાની ગણતરી કરો.

(1) $E(2X+3Y)$ (2) $V(3X - 2Y)$ (3) $V(7X+5Y+11)$

(1) $E(2X+3Y) = 2E(X) + 3E(y)$
$= 2(2.8)+3(5.3)$
$= 5.6 + 15.9$
$= 21.5$

(2) $V(3X - 2Y) = 3^3V(x) + 2^2V(y)$
$= 9(18.6) + 4(41.3)$
$= 167.4 + 165.2$
$= 332.7$

(3) $V(7X+5Y+11) = 7^2V(x) + 5^2V(y)$
$= 49(18.6) + 25(41.3)$
$= 911.4 + 1032.5$
$= 1943.9$

EX : 26 (b) નીચે આપેલ આવૃત્તિવિતરણ પરથી K ની કિંમત શોધો. મધ્યક અને વિચરણ શોધો.

X_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(x_i)$	K	$\frac{2}{15}$	2K	$\frac{4}{15}$	3K	$\frac{1}{5}$

$\sum Pxi = 1$

$K + \frac{2}{15} + 2K + \frac{4}{15} + 3K + \frac{1}{5} = 1$

$\frac{15K+2+30K+4+45K+3}{15} = 1$

90K +9 =15

90K = 6

$K = \frac{6}{90} \quad = \frac{1}{15}$

EX : 28(b) જો X અને y નિરપેક્ષ ચલો હોય અને E(x) =2.5,E(y) = 5.2 V(X) = 14.2 અને V(y) = 35.5 હોય તો (1) E(2X+9) (2) E(5+3y) (3) E(4X-y) (4) $E(x^2)$ (5) V(4X) (6) V(x-y) ની કિંમતો મેળવો.

(1) E(2X+9) = 2E(x) +9
= 2(2.5) +9
= 14

(2) E(5+3y) = 5+3E(y)
= 5+ 3(5.2)
= 20.6

(3) E(4X-y) = 4E(x) –E(y)
= 4(2.5) -5.2
= 4.8

(4) V(x) = $E(x^2) - [E(x)]^2$
14.2 = $E(x^2) - (2.5)^2$
14.2 = $E(x^2)$ - 6.25
14.2 +6.25 = $E(x^2)$
20.45 = $E(x^2)$

(5) V(4X) = 4^2 V(x)
= 16 (14.2)
= 227.2

(6) V(x – y) = V(x) + V(y)
= 14.2+ 35.5
= 49.7

Ex : 29 (b) એક ડબ્બામાં 5 ટિકિટો છે. તેના ઉપર અનુક્રમે 1,1,2,2,અને 3 અંક લખેલા છે. તેમાંથી 2 ટિકિટો લેવામાં આવે છે. તો ટિકિટ ઉપર મળતા અંકોના સરવાળાની કિંમત શોધો.

(C) એક યદચ્છ ચલ x નું સંભાવના વિતરણ P(x) નીચે પ્રમાણે છે.

$P(x) = K.x^3$ જ્યાં $x = 1,2,3$

અચળાંક K ની કિંમત મેળવો. X ની અપેક્ષિત કિંમત મેળવો.

xi	Pxi
1	K
2	8K
3	27K

Ex : 32 (d) નીચેના આવૃત્તિ વિતરણ માટે (1) E(x) અને V(x) ની કિંમતો શોધો.

Xi	0	1	2	3	4
fi	5	20	50	20	5

xi	Pxi	xi.Pxi	Xi^2.Pxi
0	0.05	0	0
1	0.2	0.2	0.2
2	0.5	1	2
3	0.2	0.6	1.8
4	0.05	0.2	0.8
	1	2	4.8

$E(X) = \sum Xi.Pxi$

$= 2$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$= 4.8 - (2)^2$

$= 4.8 - 4$

$= 0.8$

Ex : 35 (c) બે સ્વતંત્ર ચલ x અને y માટે નીચેનાં પરિણામો મળે છે. $E(x) = 4$ $E(y) = 6$ $V(x) = 5$ અને $V(y) = 4$ હોય તો (1) $E(2x-y)^2$ (2) $V(7-2x-5y)$ ની કિંમત મેળવો.

(1) $E(2x-y)^2 = E(4x^2-4xy+y^2)$

$= 4E(x^2) - 4E(x).E(y) + E(y^2)$

$= 4(21) - 4(4)(6) + 40$

$= 84 - 96 + 40$

$= 28$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$5 = E(x^2) - (4)^2$

$5+16 = E(x^2)$

$21 = E(x^2)$

$V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2$

$4 = E(y^2) - (6)^2$

$4+36 = E(y^2)$

$40 = E(y^2)$

(2) $V(7-2x-5y) = 2^2V(x) + 5^2V(y)$

$= 4(5) + 25(4)$

$= 20 + 100$

$= 120$

પ્રઘાતો

આકડાશાસ્ત્રમાં પ્રઘાતોનો ઉપયોગ આવૃત્તિવિતરણની ખાસિયતો સમજવા માટે કરવામાં આવે છે. પ્રઘાતોની મદદથી આવૃત્તિવિતરણનું કેન્દ્રીય માપ,પ્રસાર, વિષમતા અને ઘંટાકારતાનો અભ્યાસ કરી શકાય છે. પ્રઘાતો વિશિષ્ટ પ્રકારના સરેરાશનાં માપ દર્શાવે છે. આપેલા અવલોકનોના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોની સરેરાશને પ્રથમ કેન્દ્રીય પ્રઘાત કહે છે. મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોના વર્ગોની સરેરાશને દ્વિતીય કેન્દ્રીય પ્રઘાત કહે છે.

કેન્દ્રીય પ્રઘાતોને $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ સંકેત દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

કેન્દ્રીય પ્રઘાત – જ્યારે અવલોકનોનાં વિચલનો મધ્યકમાંથી લેવામાં આવે છે ત્યારે જ મળતી પ્રઘાતોને કેન્દ્રીય પ્રઘાતો કહેવામાં આવે છે.અને તેમને $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ સંકેતો વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

સતત આવૃત્તિવિતરણ માટે

પ્રથમ કે. પ્રઘાત $\mu_1 = \frac{\sum(xi-\overline{x})}{n}$

દ્વિતીય કે. પ્રઘાત $\mu_2 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^2}{n}$

તૃત્તિય કે.પ્રઘાત $\mu_3 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^3}{n}$

ચતુર્થ કે. પ્રઘાત $\mu_4 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^4}{n}$

અસતત આવૃત્તિ વિતરણ

પ્રથમ કે. પ્રઘાત $\mu_1 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})}{\mathrm{n}}$

દ્વિતીય કે. પ્રઘાત $\mu_2 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^2}{n}$

તૃત્તિય કે.પ્રઘાત $\mu_3 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^3}{n}$

ચતુર્થ કે. પ્રઘાત $\mu_4 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^4}{n}$

સાદી કેન્દ્રીય પ્રઘાત – જ્યારે મધ્યકની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવતી હોય તો આ સંજોગોમાં કોઈ પણ એક ધારેલી સંખ્યા A લઈ તેની આજુબાજુની પ્રઘાતો મેળવવામાં આવે છે. આ પ્રઘાતોને સાદી પ્રઘાતો કહેવામાં આવે છે અને તેમને

μ_1', μ_2' μ_3' μ_4' સંકેતો વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

A ની આજુબાજુની પ્રથમ સાદી પ્રઘાત $\mu_1' = \frac{\sum(xi-A)}{\mathrm{n}}$

દ્વિતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_2' = \frac{\sum(xi-A)^2}{n}$

તૃતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_3' = \frac{\sum(xi - A)^3}{n}$

ચતુર્થ સાદી પ્રઘાત $\mu_4' = \frac{\sum(xi - A)^4}{n}$

સાદી અને કેન્દ્રીય પ્રઘાત વચ્ચેનો સંબંધ

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \mu_2' - (\mu 1')^2$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'.(\mu_1') + 2\,(\mu 1')^3$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\,\mu_3'(\mu_1') + 6(\mu_2')\,.\,(\mu 1')^2 - 3\,(\mu 1')^4$

કોઈ પણ બિંદુ A ની આસપાસની પ્રથમ સાદી પ્રઘાત μ_1' ઉપરથી આવૃત્તિવિતરણનો મધ્યક નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય

મધ્યક $= \bar{x} = A + \mu_1'$

દ્વિતીય કેન્દ્રીય પ્રઘાત $\mu_2 = \mu_2' - (\mu 1')^2$ એ આવૃત્તિવિતરણનું વિચરણ દર્શાવે છે.

પ્રથમ ચાર કેન્દ્રીય પ્રઘાતોની મદદથી આવૃત્તિવિતરણની વિષમતા તેમ જ ઘંટાકારતા મેળવી શકાય છે.

વિષમતા $\beta_1 = \frac{(\mu 3)^2}{(\mu 2)^3}$ ઘંટાકારતા $\beta_2 = \frac{\mu 4}{(\mu 2)^2}$

$\gamma_1 = \sqrt{\beta}_1$ $\gamma_2 = \beta_2 - 3$

EX : 5,7,10,11,12 અવલોકનો માટેની પ્રથમ ચાર કેન્દ્રીય પ્રઘાતો મેળવો.

xi	$xi-\overline{x}$	$(xi-\overline{x})^2$	$(xi-\overline{x})^3$	$(xi-\overline{x})^4$
5	-4	16	-64	256
7	-2	4	-8	16
10	1	1	1	1
11	2	4	8	16
12	3	9	27	81
45	0	34	-36	370

$\overline{x} = \frac{\sum xi}{n}$, $\overline{x} = \frac{45}{5}$, $\overline{x} = 9$

પ્રથમ કે. પ્રઘાત $\mu_1 = \frac{\sum(xi-\overline{x})}{n}$, $\mu_1 = \frac{0}{5} = 0$

દ્વિતીય કે. પ્રઘાત $\mu_2 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^2}{n}$ $\mu_2 = \frac{34}{5} = 6.8$

તૃત્તિય કે.પ્રઘાત $\mu_3 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^3}{n}$, $\mu_3 = \frac{-36}{5} = -7.2$,

ચતુર્થ કે. પ્રઘાત $\mu_4 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^4}{n}$ $\mu_4 = \frac{370}{5} = 74$

Ex : 15,13,11,10,8 છે. તો બિંદુ 11 ની આજુબાજુની પ્રથમ ચાર સાદી પ્રઘાતો મેળવો.

xi	$xi-11$	$(xi-11)^2$	$(xi-11)^3$	$(xi-11)^4$
15	4	16	64	256
13	2	4	8	16
11	0	0	0	0
10	-1	1	-1	1
8	-3	9	-27	81
	2	30	44	354

પ્રથમ સાદી પ્રઘાત $\mu_1' = \frac{\sum(xi-11)}{n}$ $\mu_1' = \frac{2}{5} = 0.4$

દ્વિતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_2' = \frac{\sum(xi-11)^2}{n}$ $\mu_2' = \frac{30}{5} = 6$

તૃતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_3' = \frac{\sum(xi-15)^3}{n}$ $\mu_3' = \frac{44}{5} = 8.8$

ચતુર્થ સાદી પ્રઘાત $\mu_4' = \frac{\sum(xi-15)^4}{n}$ $\mu_4' = \frac{354}{5} = 70.8$

Ex : 6 નીચેના આવૃત્તિવિતરણ માટે β1 અને β2ની કિંમતો મેળવો.

	9	10	11	12	13

xi					
fi	1	3	7	3	1

xi	fi	$fixi$	$(xi-\bar{x})$	$fi(xi-\bar{x})$	$fi(xi-\bar{x})^2$	$fi(x-\bar{x})^3$	$fi(xi-\bar{x})^4$
9	1	9	-2	-2	4	-8	16
10	3	30	-1	-3	3	-3	3
11	7	77	0	0	0	0	0
12	3	36	1	3	3	3	3
13	1	13	2	2	4	8	16
	15	165		0	14	0	38

પ્રથમ કે. પ્રઘાત $\mu_1 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})}{n}$ $\mu_1 = \frac{0}{15} = 0$

દ્વિતીય કે. પ્રઘાત $\mu_2 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^2}{n}$ $\mu_2 = \frac{14}{15} = 0.933$

તૃત્તિય કે.પ્રઘાત $\mu_3 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^3}{n}$ $\mu_3 = \frac{0}{15} = 0$

ચતુર્થ કે. પ્રઘાત $\mu_4 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^4}{n}$ $\mu_4 = \frac{38}{15} = 2.533$

$\beta_1 = \frac{(\mu3)^2}{(\mu2)^3} = \frac{(0)^2}{(0.933)^3} = 0,$

$\beta_2 = \frac{\mu 4}{(\mu 2)^2} = \frac{2.533}{(0.933)^2} = \frac{2.533}{0.8705} = 2.91$

Ex : 7 નીચેના આવૃત્તિવિતરણ માટે પ્રથમ ચાર કેન્દ્રીય પ્રઘાતો મેળવો. મધ્યક અને વિચરણની કિંમત જણાવો.

xi	7	8	9	11	12	13	14
fi	7	10	20	25	20	15	3

$\bar{x} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$, $\bar{x} = \frac{1061}{100}$, $\bar{x} = 10.61$ A = 11

xi	fi	$fixi$	$(xi-11)$	$fi(xi-11)$	$fi(x-11)^2$	$fi(x-11)^3$	$fi(xi-11)^4$
7	7	49	-4	-28	112	-448	1792
8	10	80	-3	-30	90	-270	810
9	20	180	-2	-40	80	-160	320
11	25	275	0	0	0	0	0
12	20	240	1	20	20	20	20
13	15	195	2	30	60	120	240

1 4	3	421	3	9	27	81	243
	10 0	106 1		-39	389	-657	3425

પ્રથમ સાદી પ્રઘાત $\mu_1' = \frac{\sum(xi-11)}{n}$ $\mu_1' = \frac{-39}{100}$ = -0.39

દ્વિતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_2' = \frac{\sum(xi-11)^2}{n}$ $\mu_2' = \frac{389}{100}$ = 3.89

તૃતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_3' = \frac{\sum(xi-11)^3}{n}$ $\mu_3' = \frac{-657}{100}$ = -6.57

ચતુર્થ સાદી પ્રઘાત $\mu_4' = \frac{\sum(xi-11)^4}{n}$ $\mu_4' = \frac{3425}{100}$ = 34.25

સાદી પ્રઘાત પરથી કેન્દ્રીય પ્રઘાત

$\mu_1 = 0$ **$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'.(\mu_1') + 2(\mu_1')^3$**

$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$ (વિચરણ) $= -6.57-3(3.89)(-0.39)+2(-0.39)^3$

$= 3.89-(-0.39)^2$ $= -6.57+4.5513-0.118638$

$= 3.89 - 0.1521$ $= -6.688638+4.5513$

$= 0.7379$ $= -2.1373$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'(\mu_1') + 6(\mu_2').(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$

$= 34.25-4(-6.57)(-0.39)+6(3.89)(-0.39)^2-3(-0.39)^4$

$= 34.25-10.2492+3.5500- 0.0694$

$= 37.8-10.3186$

$= 27.4814$

EX : 9 નીચેના સંભાવના વિતરણ માટે પ્રથમ ચાર સાદી પ્રઘાતો,મધ્યક અને વિચરણ મેળવો.

xi	-1	0	1
pxi	0.30	0.42	0.28

xi	pxi	$xipxi$	$xipxi^2$	$xipxi^3$	$xipxi^4$
-1	0.30	-0.30	0.30	-0.30	0.30
0	0.42	0	0	0	0
1	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28
		-0.02	0.58	-0.02	0.58

$\mu_1' = \sum xipxi = -0.02$

$\mu_2' = \sum xipxi^2 = 0.58$

$\mu_3' = \sum xipxi^3 = -0.02$

$\mu_4' = \sum xipxi^4 = 0.58$

મધ્યક $= \sum xipxi = -0.02$

વિચરણ $= \mu_2' - (\mu_1')^2$

$= 0.58 - (-0.02)^2$

$= 0.58-0.0004$

$= 0.5796$

Ex : 10 એક આવૃત્તિવિતરણમાં 2 ની આજુબાજુની પ્રથમ ચાર પ્રઘાતો 1, 2.5, 5.5 અને 16 છે. તો કેન્દ્રીય પ્રઘાતો

મેળવો અને મધ્યક તથા પ્રમાણિત વિચલનની કિંમતો મેળવો.

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$= 2.5 - (1)^2$

$= 2.5 - 1$

$= 1.5$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'.(\mu_1') + 2(\mu_1')^3$

$= 5.5 - 3(2.5)(1) + 2(1)^3$

$= 5.5 - 7.5 + 2$

$= 7.5 - 7.5$

$= 0$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'(\mu_1') + 6(\mu_2').(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$

$= 16 - 4(5.5)(1) + 6(2.5)(1)^2 - 3(1)^4$

$= 16 - 22 + 15 - 3$

$= 31 - 25$,

$\mu_4 = 6$

$\overline{x} = A + \mu_1'$

$= 2+1$,

વિચરણ $= 1.5$

પ્ર.વિ $= \sqrt{1.5} = 1.22$

EX : 11 એક આવૃત્તિવિતરણની બીજી,ત્રીજી અને ચોથી કેન્દ્રીય પ્રઘાતો અનુક્રમે 100, 120, અને 5020 છે તો વિષમતા અને ઘંટાકારતા મેળવો.

અહીં $\mu_2 = 100$, $\mu_3 = 120$, $\mu_4 = 5020$

$\beta_1 = \frac{(\mu3)^2}{(\mu2)^3} = \frac{(120)^2}{(100)^3} = \frac{14400}{1000000} = 0.0144$, $\beta_2 = \frac{\mu4}{(\mu2)^2} = \frac{5020}{(100)^2}$
$= \frac{5020}{10000} = 0.502$

EX : 13 એક આવૃત્તિવિતરણની ઉદગમબિંદુ આજુબાજુની પ્રથમ ચાર સાદી પ્રઘાતો અનુક્રમે -2, 64, -440 અને 1000 છે તો તેની કેન્દ્રીય પ્રઘાતો મેળવી β_1, અને β_2 મેળવો.

$\mu_1 = 0$

$= \mu_2' - (\mu_1')^2$

$= 64 - (-2)^2$

$= 64 - 4$

$= 60$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'.(\mu_1') + 2(\mu_1')^3 \mu_2$

$= -440 - 3(64)(-2) + 2(-2)^3$

$= -440 + 384 - 16$

$= -456 + 384$

$= -72$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'(\mu_1') + 6(\mu_2').(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$

$= 10000 - 4(-440)(-2) + 6(64)(-2)^2 - 3(-2)^4$

$= 10000 - 3520 + 1536 - 48$

$= 11536 - 3568$

μ_4 = 7968

$\beta_1 = \frac{(\mu3)^2}{(\mu2)^3} = \frac{(-72)^2}{(60)^3} = \frac{5184}{216000} = 0.024$,

$\beta_2 = \frac{\mu 4}{(\mu 2)^2} = \frac{7968}{(60)^2} = \frac{7968}{3600} = 2.21$

EX : 14 એક આવૃત્તિવિતરણમાં 7 ની આજુબાજુની પ્રથમ ત્રણ પ્રઘાતો 0.2, 19.4, અને -41 છે. તો મધ્યક, વિચરણ અને ત્રીજી કેન્દ્રીય પ્રઘાત શોધો.

$\mu_1' = 0.2, \ \mu_2' = 19.4 \ \ \mu_3' = -41$

$\bar{x} = A + \mu_1'$

$= 7+0.2$

$= 7.2$

$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$= 19.4 - (0.2)^2$

$= 19.4 - 0.04$

$= 19.36$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'.(\mu_1') + 2(\mu_1')^3$

$= -41 - 3(19.4)(0.2) + 2(0.2)^3$

$= -41 - 11.64 + 2(0.008)$

$= -41 - 11.64 + 0.016$

$= -52.64 + 0.016$

$= -52.624$

EX : 28 (c) જો $\mu_2 = 2.74$ $\mu_3 = -1.17$ અને $\mu_4 = 17.1$ γ_1, અને γ_2 ની કિંમતો શોધો.

$\beta_1 = \frac{(\mu 3)^2}{(\mu 2)^3} = \frac{(-1.17)^2}{(2.74)^3} = \frac{1.3689}{20.5708} = 0.0665,$

$\beta_2 = \frac{\mu 4}{(\mu 2)^2} = \frac{17.17}{(2.74)^2} = \frac{17.17}{7.5076} = 2.2870$

$\boldsymbol{\gamma_1} = \sqrt{\beta 1} = \sqrt{0.0665} = 0.258$ $\boldsymbol{\gamma_2} = \beta_2 - 3$, 2.2870 -3 = -0.713

Ex : 30 (c) અવલોકનો 28,30,35,36,41 માટે પ્રથમ ચાર પ્રઘાતો શોધો.

$\boldsymbol{xi}$	$\boldsymbol{xi - \overline{x}}$	$\boldsymbol{(xi - \overline{x})^2}$	$\boldsymbol{(xi - \overline{x})^3}$	$\boldsymbol{(xi - \overline{x})^4}$
28	-6	36	-216	1296
30	-4	16	-64	256
35	1	1	1	1
36	2	4	8	16
41	7	49	343	2401

170	0	106	72	3970

(e) **જો $\mu_2 = 4$, $\mu_4 = 48$ હોય તો β_2 અને γ_2 ની કિંમત શોધો.**

$\beta_2 = \frac{\mu 4}{(\mu 2)^2} = \frac{48}{(4)^2} = \frac{48}{16} = 3$ $\quad \gamma_2 = \beta_2 - 3, \quad = 3 - 3 \quad = 0$

(f) 3 માંથી માપેલી પ્રથમ સાદી પ્રઘાત 5 હોય તો મધ્યકની કિંમત મેળવો.

પ્રઘાતો

આકડાશાસ્ત્રમાં પ્રઘાતોનો ઉપયોગ આવૃત્તિવિતરણની ખાસિયતો સમજવા માટે કરવામાં આવે છે. પ્રઘાતોની મદદથી આવૃત્તિવિતરણનું કેન્દ્રીય માપ,પ્રસાર, વિષમતા અને ઘંટાકારતાનો અભ્યાસ કરી શકાય છે. પ્રઘાતો વિશિષ્ટ પ્રકારના સરેરાશનાં માપ દર્શાવે છે. આપેલા અવલોકનોના મધ્યકમાંથી લીધેલાં વિચલનોની સરેરાશને પ્રથમ કેન્દ્રીય

પ્રઘાત કહે છે. મધ્યકમાંથી લીઘેલાં વિચલનોના વર્ગોની સરેરાશને દ્વિતીય કેન્દ્રીય પ્રઘાત કહે છે.

કેન્દ્રીય પ્રઘાતોને $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ સંકેત દ્વારા દર્શાવવામાં આવે છે.

કેન્દ્રીય પ્રઘાત – જ્યારે અવલોકનોનાં વિચલનો મધ્યકમાંથી લેવામાં આવે છે ત્યારે જ મળતી પ્રઘાતોને કેન્દ્રીય પ્રઘાતો કહેવામાં આવે છે.અને તેમને $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ સંકેતો વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

સતત આવૃત્તિવિતરણ માટે

પ્રથમ કે. પ્રઘાત $\mu_1 = \frac{\sum(xi-\overline{x})}{n}$

દ્વિતીય કે. પ્રઘાત $\mu_2 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^2}{n}$

તૃત્તિય કે.પ્રઘાત $\mu_3 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^3}{n}$

ચતુર્થ કે. પ્રઘાત $\mu_4 = \frac{\sum(xi-\overline{x})^4}{n}$

અસતત આવૃત્તિ વિતરણ

પ્રથમ કે. પ્રઘાત $\mu_1 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})}{n}$

દ્વિતીય કે. પ્રઘાત $\mu_2 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^2}{n}$

તૃત્તિય કે.પ્રઘાત $\mu_3 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^3}{n}$

ચતુર્થ કે. પ્રઘાત $\mu_4 = \frac{\sum fi(xi-\overline{x})^4}{n}$

સાદી કેન્દ્રીય પ્રઘાત – જ્યારે મધ્યકની કિંમત અપૂર્ણાંકમાં આવતી હોય તો આ સંજોગોમાં કોઈ પણ એક ધારેલી સંખ્યા A લઈ તેની આજુબાજુની પ્રઘાતો મેળવવામાં આવે છે. આ પ્રઘાતોને સાદી પ્રઘાતો કહેવામાં આવે છે અને તેમને

μ_1', μ_2' μ_3' μ_4' સંકેતો વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

A ની આજુબાજુની પ્રથમ સાદી પ્રઘાત $\mu_1' = \frac{\sum(xi-A)}{n}$

દ્વિતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_2' = \frac{\sum(xi-A)^2}{n}$

તૃતીય સાદી પ્રઘાત $\mu_3' = \frac{\sum(xi-A)^3}{n}$

ચતુર્થ સાદી પ્રઘાત $\mu_4' = \frac{\sum(xi-A)^4}{n}$

સાદી અને કેન્દ્રીય પ્રઘાત વચ્ચેનો સંબંધ

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \mu_2' - (\mu 1')^2$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'.(\mu_1') + 2(\mu 1')^3$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'(\mu_1') + 6(\mu_2').(\mu 1')^2 - 3(\mu 1')^4$

કોઈ પણ બિંદુ A ની આસપાસની પ્રથમ સાદી પ્રઘાત μ_1' ઉપરથી આવૃત્તિવિતરણનો મધ્યક નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય

મધ્યક $= \bar{x} = A + \mu_1'$

દ્વિતીય કેન્દ્રીય પ્રઘાત $\mu_2 = \mu_2' - (\mu 1')^2$ એ આવૃત્તિવિતરણનું વિચરણ દર્શાવે છે.

પ્રથમ ચાર કેન્દ્રીય પ્રઘાતોની મદદથી આવૃત્તિવિતરણની વિષમતા તેમ જ ઘંટાકારતા મેળવી શકાય છે.

વિષમતા $\beta_1 = \frac{(\mu 3)^2}{(\mu 2)^3}$ ઘંટાકારતા $\beta_2 = \frac{\mu 4}{(\mu 2)^2}$

$\gamma_1 = \sqrt{\beta}_1$ $\gamma_2 = \beta_2 - 3$